прогнозных оценок вызывает трудности в мобилизации налоговыми органами запланированных доходов в бюджетную систему Российской Федерации, либо неоправданно высокое перевыполнение установленных заданий субъектам федерации, что влечет за собой нарушение бюджетного равновесия, и, как следствие, дестабилизационные процессы в социально-экономической системе. Анализ тренда может быть полезен для принятия решений об изменении параметров налоговой системы, при оценке уже принятых решений государственными органами законодательной и исполнительной власти всех уровней и выработке мер, направленных на стабилизацию функционирования социально-экономической системы региона.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пансков В.Г. Российская система налогообложения: проблемы развития – М.: Международный центр финансово-экономического развития, 2004.-240с.

2. Большой экономический словарь/ Под ред. А.Н.Азрилияна. -7-е изд.доп. – М.: Институт Новой экономики, 2008.- 1472 с.

3. Финансово-кредитный словарь : [В 3 т.] / Гл. ред. В. Ф. Гарбузов и др. Т. 2: К-П / [Сост. Л. Е. Бабашкин и др.] .-2-е изд., стер. .-М. : Финансы и статистика, 1994.-511с.

4. http://www.AIPortal.ru – Портал искусственного интеллекта.

5. Искусственные нейронные сети. Теория и практика/ Круглов В. В., Борисов В. В. — М.: Горячая линия – Телеком, 2001. – С. 382.

6. http://ииклуб.рф/neur-2.html – Нейронные сети: алгоритм обратного распространения/ С. Короткий.

УДК 007.51

Е. М. Лещенко

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ УПРАВЛЕНИЯ ОБУЧЕНИЕМ С УЧЕТОМ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВРЕМЕНИ УСВОЕНИЯ ЗНАНИЙ

В статье представлены модели, позволяющие решить ряд важных педагогических задач управления обучением, таких как оптимальное распределение времени между учебными дисциплинами, определение затрат времени на изучение отдельных тем, разделов, курсов, построение оптимальной последовательности изучения дисциплины на основе поэтапного усвоения знаний и др.

Ключевые слова: *математическая модель, управление обучением, формирование знаний, процесс утери информации обучаемым (забывание).*

UDC 007.51

E. M. Leschenko

MATHEMATICAL MODELS OF LEARNING MANAGEMENT WITH ACCOUNT OF THE DISTRIBUTION OF TIME OF MASTERING OF KNOWLEDGE

The article presents models, which allow to solve a number of important pedagogical problems of management of training, such as the optimal allocation of time between academic disciplines, determination of the time spent on the study of individual topics, sections, courses, creation of the optimum sequence of the discipline on the basis of gradual assimilation of knowledge, etc.

Keywords: *mathematical model, management training, and the creation of knowledge, the process of loss of information students (forgetting).*

Количественные модели обучения в педагогике фактически отсутствуют, хотя в некоторых публикациях таковыми называют математические модели научения в зависимости от числа повторений выполнения осваиваемой операции. Такая математическая модель описывает не процесс формирования знаний, а процесс запоми-

нания (заучивания) какого-либо текста, либо процесс тренировки с целью формирования навыка.

Например, известна зависимость [1, 2]

$$H = m\left(1-\exp\left(-\gamma n\right)\right), \quad (1)$$

где H – уровень навыка;

m – предельно достижимое значение навыка;

n – число повторений операций;

γ – постоянная научения.

Вид этой зависимости показан на рис.1.

Она может использоваться, в частности, для оценки числа повторений текста, необходимого для безошибочного его запоминания, для планирования количества тренировок, которые необходимы для достижения определенной скорости выполнения операции и т. п. Как видно из графика, после некоторого числа повторений прирост навыка резко уменьшается. Этот участок кривой называют "плато". Разнообразные варианты этой модели описаны в ряде монографий [3].

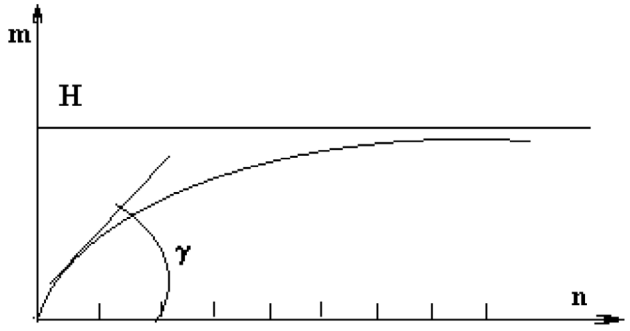


*Рис.*1. График хода научения повторению операций.

Реальный же процесс овладения знаниями более сложный и многоэтапный. Для того чтобы эффективно управлять процессом познания и оптимизировать обучение, необходимо синтезировать ряд моделей, которые бы строились на основе простейших, но учитывали бы и многоэтапность реального процесса усвоения знаний.

Рассмотрение начнем с модели, описывающей усвоение одного понятия (элемента знания). В этом случае можно пренебречь процессом утери информации обучаемым (забывания). Наибольший интерес для целей обеспечения управления обучением представляет распределение времени, которое требуется для усвоения знаний. При рассмотрении этого распределения необходимо учитывать возможности нахождения обучаемых в разных состояниях обученности по данному элементу знания в данный момент времени. Начальный уровень знаний обучаемых может быть разный. Некоторые из них могут полностью понимать данный материал, другие имеют нулевой начальный уровень.

В общем случае будем считать, что при достижении полного понимания необходимо K этапов. Уровень первоначальной подготовки индивидов будем определять вектором вероятностей

$$P = \left(p_0, p_1, ..., p_K\right), \quad (2)$$

где p_i – вероятность того, что начало подготовки индивидов соответствует i-му состоянию знаний.

В соответствии с простейшими моделями, распределение времени, необходимого для одного этапа формирования знаний является экспоненциальным. Причины использования такого распределения обоснованы в [4].

$$F_i\left(\tau\right) = 1-\exp\left(\lambda_i \tau\right), \quad (3)$$

где F_i – функция распределения времени, необходимого для перехода с $\left(i-1\right)$ на i-й уровень обученности; $1/\lambda_i$ – среднее время перехода.

На рис. 2 показан граф переходов между состояниями обученности.

Граф показывает, что если индивид имеет нулевое состояние обученности по данному элементу знаний, то для полного усвоения ему необходимо пройти все этапы, затратив время равное сумме времен:

$$\tau\left(0\right) = \sum_{i=1}^{K} \tau_i \, . \quad (4)$$

Если же обучаемый имеет K-й уровень обученности, то затраты времени отсутствуют.

В общем случае, распределение времени на обучение будет иметь вид:

$$F\left(\tau\right) = \sum_{i=0}^{K} p_i F_{i+1}\left(\tau\right) * F_{i+2}\left(\tau\right) * ... * F_K\left(\tau\right), \quad (5)$$

где $F_i\left(\tau\right) * F_{i+1}\left(\tau\right)$ – свертка функций.

Для нахождения аналитических выражений для распределения времени (5) используем аппарат характеристических функций [7].

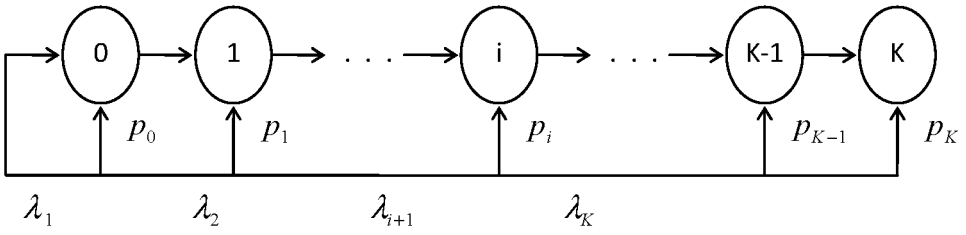


*Рис.*2. Граф переходов состояний обученности.

Для экспоненциального распределения характеристическая функция $\theta_i(\omega)$ будет равна:

$$\theta_i(\omega) = \lambda_i \int_0^\infty e^{-\lambda_i \tau} e^{-j\omega\tau} d\tau = \frac{\lambda_i}{\lambda_i + j\omega}, \qquad (6)$$

где $j = \sqrt{-1}$.

Свертка функции распределения соответствует произведению характеристических функций. Благодаря этому, выражение для характеристической функции распределения времени имеет достаточно простой вид:

$$\theta(\omega) = \sum_{i=0}^{K} p_i \prod_{\gamma=i}^{K} \theta_{\gamma+1}(\omega) = \sum_{i=0}^{K} p_i \prod_{\gamma=i}^{K} \frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_{i+1} + j\omega}, \qquad (7)$$

где $\theta_{i+1} = 1$.

Данная характеристическая функция распределения показывает, что при экспоненциальном распределении времени между этапами, распределение суммарного времени обучения принадлежит к классу распределений Кокса [5], для которых

$$\theta(\omega) = b_0 + \sum_{i=1}^{K} a_0 \ldots a_{i-1} b_i \prod_{\gamma=1}^{i} \frac{\lambda_\gamma}{\lambda_\gamma + j\omega}. \qquad (8)$$

Естественно, a_i и b_i являются функциями от $p_0, p_1, .., p_K$.

В общем виде выражения для них достаточно громоздкие, но для наиболее интересного случая пяти фаз обучения математические выражения для a_i и b_i приводятся ниже:

$$a_0 = 1 - p_5,$$

$$b_0 = p_5;$$

$$a_1 = 1 - \frac{p_4}{1 - p_5} = \frac{1 - p_4 - p_5}{1 - p_5},$$

$$b_1 = \frac{p_4}{1 - p_5};$$

$$a_2 = 1 - b_2 = \frac{1 - p_4 - p_5 - p_3 + p_3 p_5}{1 - p_4 - p_5},$$

$$b_2 = \frac{p_3(1 - p_5)}{1 - p_4 - p_5};$$

$$a_3 = \frac{1 - p_4 - p_5 - p_3 + p_3 p_5 - p_2 + p_2 p_4 + p_2 p_5}{1 - p_4 - p_5 - p_3 + p_3 p_5},$$

$$b_3 = \frac{p_2(1 - p_4 - p_5)}{1 - p_4 - p_5 - p_3 + p_3 p_5};$$

$$a_4 = \frac{1 - p_2 - p_3 - p_4 - p_5 + p_2 p_5 + p_2 p_4 + p_3 p_5 - p_1 + p_1 p_4 + p_1 p_5 + p_1 p_3 - p_1 p_3 p_5}{1 - p_2 - p_3 - p_4 - p_5 + p_2 p_5 + p_2 p_4 + p_3 p_5},$$

$$b_4 = \frac{p_1(1 - p_4 - p_5 - p_3 + p_3 p_5)}{1 - p_2 - p_3 - p_4 - p_5 + p_2 p_5 + p_2 p_4 + p_3 p_5};$$

$$a_5 = 1 - b_5,$$

$$b_5 = \frac{p_0}{1 - p_1 - p_2 - p_3 - p_4 - p_5 + p_2 p_5 + p_2 p_4 + p_3 p_5 + p_1 p_4 + p_1 p_5 + p_1 p_3 - p_1 p_3 p_5}.$$

Произведя обратное преобразование Фурье от характеристической функции, получаем окончательное выражение для плотности функции распределения суммарного времени на обучение.

В случае, если все λ_i не равны друг другу, формула имеет вид:

$$F(\tau) = \sum_{i=0}^{K} p_i \sum_{\gamma=i}^{K} \frac{\lambda_\gamma}{\prod_{m=\gamma}^{K} (\lambda_\gamma + \lambda_m)} e^{-\lambda_\gamma \tau}, \qquad (9)$$

то есть, мы имеем гиперэкспоненциальное распределение времени. Если же на некоторых этапах λ равны друг другу, то плотность распределения вероятности приобретает вид:

$$F(\tau) = \sum_{i=0}^{K} p_i \sum_{\gamma=i}^{K} \sum_{l=1}^{m_\gamma} \frac{\Phi_{\gamma l}(\lambda_\gamma)}{(m_\gamma - l)!(l-1)!} \tau^{m_\gamma - l} e^{-\lambda_\gamma \tau}, \qquad (10)$$

где $\sum m_\gamma = K$, m_γ – количество этапов, для которых имеют место одинаковые $\lambda = \lambda_\gamma$,

$$\Phi_{\gamma l} = \frac{d^{l-1}}{d\omega^{l-1}} \frac{\omega\left(\omega+\lambda_\gamma\right)^{m_\gamma}}{\prod_{\gamma=i}^{K}\left(\omega+\lambda_\gamma\right)}.$$

В этом случае распределение времени становится гиперэрланговским [5].

Данная модель, как уже говорилось, предназначена для описания усвоения достаточно малых объемов. Если же нужно описать процесс усвоения крупного раздела дисциплины, то обязательным является учет процессов утери информации (забывания). Описание такого процесса также может быть получено на основе марковских цепей с непрерывным временем. Как известно [2], за период равный 9 часам потери информации могут доходить до 70% от исходного уровня. В то же время, из педагогической практики, можно сделать вывод, что если понятие хорошо закреплено, то обучаемый помнит его очень долго. То есть, существует состояние знаний, для которых потери информации крайне малы.

Существуют и промежуточные состояния между описанными выше. В связи с этим, целесообразно провести классификацию состояний знаний по скорости потери важной для последующего обучения информации.

Приближенно в педагогической литературе определено три состояния знаний: незнание (отсутствие знаний по вопросу); неустойчивые (несистематизированные знания, не подкрепленные практикой) и устойчивые знания (систематизированные, закрепленные на практике). Скорость утери информации в каждом состоянии будем характеризовать интенсивностью потери знаний μ_k, равной относительному уменьшению вероятности сохранения данного уровня знаний за единицу времени.

Характеристики, связывающие время переходов между состояниями при обучении, как и ранее, будем характеризовать показателями λ. Интенсивности переходов между состояниями λ зависят от способности обучаемого, способа и последовательности подачи учебного материала. Интенсивность же забывания, в предлагаемой модели, зависит только от типа состояний. В первом приближении можно принять μ, соответствующее переходам из состояния устойчивых знаний к неустойчивым, близкое к нулю. Тогда граф перехода значительно упрощается.

Динамику изменения вероятностей нахождения обучаемых в состояниях знаний можно описывать матричными дифференциальными уравнениями [6] вида:

$$\frac{dP}{dt} = \|A\|P, \qquad (11)$$

где $P = \{p_1, p_2, ..., p_n\}^T$ – вектор-столбец вероятностей нахождения знаний обучаемого в комбинации состояний уровней по элементам раздела; $n = 3^m$, где m – количество элементов раздела; $\|A\|$ – матрица интенсивности переходов между состояниями

$$a_{ij} = \lambda_{ij} - \mu_{ij}, \qquad (12)$$

где λ_{ij}, μ_{ij} – интенсивности переходов из i -го в j -е состояние.

Решив данное матричное уравнение при начальных условиях P_0, получаем полную информацию о динамике изменения знаний во времени, в том числе о распределении времени достижения полного усвоения раздела. Приводить общий вид аналитического решения не представляется целесообразным из-за его громоздкости. Это и не является необходимым, так как при достаточно больших m решение все равно приходится получать численно, используя стандартное программное обеспечение.

Основная задача этой модели определить такой способ подачи информации и последовательности обучения, при котором время достижения заданного состояния обученности с требуемой вероятностью будет минимальной. Такая задача может быть решена методом динамического программирования. Действительно, возможность выбора λ_{ij} при соответствующей подаче материала приводит к тому, что процесс становится управляемым марковским процессом. Этот процесс задают следующие элементы:

– множество $X_1, X_2, ..., X_{3^m}$ (состояния знаний);

– множество $U_1, ..., U_{3^m-1}$ (множество управлений);

– отображения множества управлений на множество состояний, т.е.

$$\left\|\lambda_{ij}\right\| = F(U). \qquad (13)$$

В качестве текущей платы q на множестве управлений $\vec{U}$ может быть взято среднее время перехода между состояниями.

Задача нахождения оптимального управления (стратегия) производится методом последовательных оценок элементов пути в графе (стрелок). При этом учитывается вероятность утери знаний (возвращение на более низкий уровень).

Таким образом, можно выбрать оптимальный маршрут, путь в графе, соответствующей минимальному среднему времени. Данный способ оптимизации целесообразно применять совместно с логической концептуальной сетью изучения предмета.

Вычислительная сложность нахождения оптимального пути быстро растет с увеличением размерности задачи. В связи с этим применение ее ограничено максимум изучением одной дисциплины. Планирование и оптимизация требует более простых, укрупненных моделей, учитывающих дополнительно еще один фактор – снижение работоспособности обучаемого в связи с уставанием.

Обозначим уровень знаний как Z. Приближенно, динамика изменения знаний в соответствии с моделями Халла и Мастеллера-Буша описывается функцией вида:

$$Z = Z_{\max}\left(1-\exp\left(-\alpha t\right)\right). \qquad (14)$$

Такая функция соответствует решению определенного дифференциального уравнения

$$\frac{dZ}{dt} = \alpha\left(1-\frac{Z}{Z_{\max}}\right). \qquad (15)$$

Достаточно просто изменить это уравнение так, чтобы оно учитывало процессы забывания информации и прерывистый характер подачи учебного материала:

$$\frac{dZ}{dt} = \alpha\left(1-\frac{Z}{Z_{\max}}\right)\nu(t) - \delta\frac{Z}{Z_{\max}}, \qquad (16)$$

где $\nu(t)=1$, когда t принадлежит интервалу учебных занятий, и $=0$ в противном случае;

α – характеризует работоспособность обучаемого (способность усваивать информацию); δ характеризует интенсивность забывания информации.

$$Z(k) = Z_{\max} - \left(Z_{\max} - Z(0)\right)\times$$
$$\times\frac{1}{T^k}\prod_{i=1}^{k}\left(\begin{array}{c} T-\alpha\sum_{i=1}^{k}\Delta t_i\exp\left(-\delta\left(t_i-t_{i-1}\right)\right)\times \\ \times\exp\left(-\Delta t_i\left(24-\Delta t_i\right)\right)\end{array}\right), \qquad (17)$$

где $Z(k)$ – уровень подготовки в k-й учебный день;

Δt_i – длительность занятий в i-й учебный день.

При этом учитывалось, что работоспособность обучаемых падает пропорционально следующей функции:

$$\frac{\alpha(\Delta t)}{\alpha(0)} = \exp\left(-\Delta t_i\left(24-\Delta t_i\right)\right). \qquad (18)$$

При совместном изучении нескольких предметов можно записать систему уравнений для совместной динамики знаний:

$$z_j(k) = z_{j\acute{K}} - \left(z_{j\acute{K}} - z_j(0)\right)\times$$
$$\times\frac{1}{T_j^k}\prod_{i=1}^{k}\left(T_j-\alpha_j\sum_{i=1}^{k}\Delta t_{ij}\exp\left(-\delta\left(t_{ij}-t_{i-1,j}\right)\right)\right)\times \qquad (19)$$
$$\times\exp\left(\sum_{j=1}^{m}\Delta t_{ij}\Big/\left(24-\sum_{j=1}^{m}\Delta t_{ij}\right)\right)$$

где $j=1..m$, $z_j(k)$ – уровень подготовки по j-му предмету в k-й учебный день; z_{ij} – требуемый уровень подготовки; T_j – плановое время на изучение j-го предмета; Δt_{ij} – длительность занятий по j-му предмету в i-й день; α и δ – коэффициенты усвоения и забывания информации.

Основываясь на этой системе можно решить задачу оптимизации распределения времени между изучаемыми дисциплинами.

Для этого необходимо использовать агрегативный показатель качества подготовки специалиста, являющийся функци-

ями от уровня знаний по m рассматриваемым дисциплинам:

$$F\left(Z_1, Z_2, ..., Z_m\right) = Z\left(T_{K_1}, T_{K_2}, ..., T_{K_m}\right), \quad (20)$$

где T_{K_i} – суммарное время, отводимое на изучение i-й дисциплины, раздела и т.д. Учитывая, что суммарное время на изучение всех дисциплин фиксировано,

$$\sum_{i=1}^{m} T_{K_i} = T_P, \quad (21)$$

где T_P – плановое время, можно решить задачу максимизации показателей качества методом неопределенных множителей Лагранжа.

Таким образом, предложенные модели позволяют решить ряд важных педагогических задач управления обучением, таких как оптимальное распределение времени между учебными дисциплинами, определение затрат времени на изучение отдельных тем, разделов, курсов, построение оптимальной последовательности изучения дисциплины на основе поэтапного усвоения знаний, с учетом элементов забывания (потерь информации) и др.

ЛИТЕРАТУРА

1. Басов В. М., Соломонов Л. А. Инженерно-психологическое проектирование взаимодействия человека с техническими средствами. – М.: Высшая школа, 1990. – 111 с.

2. Основы инженерной психологии / Под ред. Б.Ф. Ломова. М.: Высшая школа. 1977. – 334 с.

3. Основы педагогики, психологии и организации учебного процесса в ввузе. – М.: Военная Академия им. Дзержинского, 1985.- 203 с.

4. Свиридов А.Г. Основы статистической теории обучения и контроля знаний.- М.: Высшая школа. 1981. – 211 с.

5. Жожикашвили В.А., Вишневский В.М. Сети массового обслуживания. Теория и применение к сетям ЭВМ. – М.: Радио и связь.1988. – 192 с.

6. Карлин С. Основы теории случайных процессов: Пер. с англ.,- М.: Мир, 1971. – 536 с.

7. Крамер Г. Математические методы статистики, пер. с анг. – М.: Мир, 1975. – 648 с.