СОЦИАЛЬНАЯ ЭКОНОМИКА, ПОЛИТИКА И ДЕМОГРАФИЯ: РЕГИОНАЛЬНЫЙ КОНТЕКСТ

УДК 517.977.5:616-036.2

Е. П. Белоусова

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЗАБОЛЕВАНИЯ В РАМКАХ РЕГИОНАЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ «ЗДОРОВЬЕ»

Аннотация: *математическое моделирование заболеваний является мощным инструментом для исследования механизмов распространения заболевания. Эпидемиологические модели служат основой для прогнозирования и оценки динамики распространения заболевания. Для ослабления и надзора за эпидемией важно изучить и разработать качественные и адекватные математические модели эпидемии.*

Ключевые слова: *заболевание, эпидемия, математическая модель, оптимальное управление, эксперимент.*

UDK 517.977.5:616-036.2

E. P. Belousova

MODELLING THE SPREAD OF THE DISEASE IN THE REGIONAL HEALTH PROGRAMME

Abstract: *mathematical modeling of diseases is a powerful tool for investigating the mechanisms of disease spread. Epidemiological models serve as a basis for predicting and estimating the spread of the disease. To mitigate and oversee the epidemic, it is important to study and develop qualitative and adequate mathematical models of the epidemic.*

Keywords: disease, epidemic, mathematical model, optimal management, experiment.

DOI: 10.22394/1997-4469-2019-47-4-108-124

Введение

Сохранение и укрепление здоровья населения — важнейшая социально-экономическая проблема, неотъемлемой частью которой является уменьшение инфекционной заболеваемости. В решении этой задачи предупредительные меры играют главную роль. Прогнозируемые динамики распространения заболевания позволяют разработать и применить адекватные меры противодействия, обеспечить правильное использование материальных и людских ресурсов. Информационной основой прогноза в рассматриваемой области служат статистические данные, регулярно получаемые соответствующими профильными структурами. Например, в Санкт-Петербурге (и многих других регионах России) наблюдение за распространением гриппа и острых респираторных вирусных инфекций осуществляет центр, организованный на базе НИИ гриппа Минздравсоцразвития России. Специалисты НИИ гриппа инициировали настоящее исследование, а также выступили в роли научных консультантов и экспертов в ходе его проведения. Исследование направлено на разработку методов и моделей, позволяющих получить прогноз развития эпидемий и оценку эффективности различных мер по противодействию их развитию с приемлемой для решения практических задач точностью.

Трудность моделирования распространения заболеваний прослеживается давно (начало использованию математических методов при исследовании эпидемий было положено в середине XVII в.). За это время методы моделирования заболеваний неоднократно совершенствовались, возникали

варианты моделей, так или иначе отображающие особенности исследуемых процессов. Впрочем, сделать вывод, что поставленная проблема решена пока нельзя.

Математическое моделирование заболеваний является мощным инструментом для исследования механизмов распространения заболевания. В этом контексте эпидемиологические модели служат основой для прогнозирования и оценки динамики распространения заболевания. Для ослабления и надзора за эпидемией важно изучать качественные и адекватные математические модели эпидемии. В настоящее время благодаря достижениям в сфере математического моделирования это является осуществимой задачей.

Цель работы

Рассмотреть методы математического моделирования до 1990-х годов и после 2000-х.

Выбрать современную модель процесса распространения заболеваний.

Реализовать компьютерную модель распространения заболевания для получения прогноза в автоматическом режиме.

Провести анализ компьютерной модели.

1. Развитие математических моделей процесса распространения заболеваний

1.1 Способы противодействия процессу распространения заболевания

В истории человечества известно немало эпидемий, уносящих жизни большого числа людей во всем мире. Во время эпидемий погибали целые народы. Одними из самых страшных эпидемий были эпидемии оспы, известные еще с давних времен (450 г до н. э. — 1977 г.). В 1976 году эпидемия оспы унесла жизни около 2 миллионов людей. В связи с этим Всемирная Организация Здравоохранения приняла постановление о поголовной вакцинации, благодаря чему, в 1977 году был отмечен последний случай заражения этой инфекцией. В настоящее время оспы больше не существует. В 1916 году — эпидемия полиомиелита в Европе и США. За один год в США полиомиелитом заразились 27 тысяч человек. В 1917—1921 гг. — эпидемия сыпного тифа. В этот период в России погибло около 3 миллионов человек.

Еще одна смертельно опасная эпидемия захлестнула мир в 1918 году. Это было начало нового инфекционного заболевания, в настоящее время общеизвестного под наименованием «испанского гриппа» или «испанки». Его также именуют Великим гриппом или гриппом 1918 года. К финалу Перовой мировой войны погибло около 37 миллионов человек. Спустя год, заболеваемость понизилась, но, тем не менее, прецеденты заболевания появлялись. По разным подсчетам количество жертв этой болезни составило от 50 до 100 миллионов человек. Этот вид гриппа появился вследствие передачи инфекции от птиц человеку, организм которого не был готов к атаке нового вируса. Люди умирали от осложнений, связанных с возникновением жидкости в легких, от недостаточности кислорода. Спустя год заболевание стало менее активно в связи с тем, что вирус мутировал в менее опасные для людей штаммы. В 1921—1923 гг. от чумы в Индии погибло около 1 миллиона человек.

Вторая эпидемия полиомиелита поразила мир в 1950 году. Тогда и была изготовлена вакцина. В СССР первую поголовную вакцинацию провели в Эстонии, где заболеваемость была самой высокой. С тех пор прививка внесена в Национальный календарь прививок. В 1952 году числилось 58000 прецедентов заболевания полиомиелитом в США. Одна треть заболевших была парализована, более 3000 человек умерли. Заражение инфекционными заболеваниями рассматривается объектом повышенного внимания и порождает возрастающую озабоченность в обществе, что, определённо, осознается и на государственном уровне.

Исходя из уроков прошлого, бесспорны значимость и необходимость выполнения профилактических мероприятий. В прежние времена мероприятия по ограничению распространения инфекции проводили самыми обыкновенными методами — изоляция и карантин, улучшение персональной гигиены, применение дезинфицирующих средств, попытки не формировать большого скопления людей. Так, во время «Испанки» 1918 года, в некоторых странах на целый год были закрыты общественные места, суды, школы, церкви, кино. Были закрыты магазины, и торговцы обслужи-

вали клиентов прямо на улице. В одном из городов США были запрещены рукопожатия. В некоторых странах был введен военный режим.

Почти для всей территории Российской Федерации (РФ) существует опасность возникновения экстренных ситуаций в сфере общественного здравоохранения, ассоциированных с вирусными инфекциями. Диапазон этой опасности, определяемый вероятностью формирования местных прецедентов инфекций и их привоза с эндемичных территорий, неодинаков как для разных субъектов РФ, так и для обособленных муниципальных районов каждого из субъектов.

Профилактические мероприятия — значимая составляющая системы здравоохранения, нацеленная на становление у населения медико-социальной инициативности и мотивации на здоровый образ жизни. Вопросы предупреждения инфекций на основе выполнения правил личной гигиены и разумной диететики занимали значимое место в медицине древнего мира. Впрочем, модернизация научных концепций профилактики началась лишь в XIX в. благодаря развитию общебиологических наук, медицинской науки в целом и возникновению её многочисленных дисциплин, занимающихся частными вопросами физиологии, санитарии и эпидемиологии. Огромную роль сыграло возникновение общественных идей в клинической медицине. Передовые врачи и деятели медицинской науки (как в России, так и за рубежом) видели будущее медицины в становлении общественной профилактики и в связи лечебной и профилактической медицины.

Подчеркнем роль общественной, включающую систему действий по охране здоровья коллективов и индивидуальную профилактику, подразумевающую выполнение правил персональной гигиены в быту и на производстве. Личная гигиена включает предосторожности по предупреждению инфекций, поддержанию и укреплению здоровья, которые реализует сам человек, и фактически заключается в выполнении норм здорового образа жизни, к персональной гигиене, гигиене супружеских и семейных отношений, гигиене одежды, обуви, разумному питанию и питьевому режиму, гигиеническому обучению подрастающего поколения, разумному распорядку труда и отдыха, активному занятию физической культурой и др.

Общественная профилактика включает систему социальных, экономических, законодательных, воспитательных, санитарно-технических, санитарно-гигиенических, противоэпидемических и лечебных мероприятий, планомерно проводимых государственными институтами и общественными организациями с целью обеспечения всестороннего развития физических и духовных сил граждан, устранения факторов, вредно действующих на здоровье населения. Меры общественной профилактики нацелены на поддержание высокого показателя общественного здоровья, устранение причин, порождающих инфекции, формирование эффективных условий коллективной жизни, включая условия труда, отдыха, материальное обеспечение, жилищно-бытовые условия, увеличение ассортимента продуктов питания и продуктов народного производства, а также развитие здравоохранения, образования и культуры, физической культуры. Результативность мер общественной профилактики во многом зависит от осознанного отношения граждан к охране своего здоровья и здоровья других людей, от деятельного привлечения населения к выполнению оздоровительных мероприятий, от того, насколько полно каждый гражданин применяет обеспечиваемые ему обществом возможности для укрепления и сохранения здоровья. Практическое выполнение общественной профилактики требует законодательных мер, непрерывных и немалых материальных затрат, а также коллективных действий всех звеньев государственного аппарата, медицинских учреждений, предприятий промышленности, строительства, транспорта, агропромышленного комплекса и т. д.

В зависимости от состояния здоровья, возникновения факторов риска заболевания или выраженной патологии можно изучить три вида профилактики:

1. Первичная профилактика — схема мер предупреждения зарождения и формирования заболеваний (дезинсекция, дератизация, вакцинация, разумный режим труда и отдыха, разумное качественное питание, физическая активность, ох-

рана окружающей среды и т. д.). Перечень мероприятий первичной профилактики может обеспечиваться в масштабах государства.

2. Вторичная профилактика — комплекс действий, нацеленных на предотвращение выраженных факторов риска, которые при определенных обстоятельствах (стресс, снижение иммунитета, избыточные нагрузки на любые функциональные системы организма) могут привести к формированию заболеваний. Это динамическое наблюдение, направленное лечение, разумное постепенное оздоровление.

3. Некоторые эксперты рекомендуют термин третичная профилактика как комплекс мероприятий по реабилитации больных, потерявших способность к нормальной жизнедеятельности. Третичная профилактика решает задачу социальной (повышение уверенности в собственной социальной пригодности), трудовой (вероятность восстановления трудовых навыков), психологической (восстановление коммуникативной активности) и медицинской (восстановление функций органов и систем организма) реабилитации.

В современном мире существует два основных способа профилактики распространения заболеваний:

1. Иммунопрофилактика.

2. Программа «Здоровье».

Иммунопрофилактика — это вид профилактики вирусных заболеваний, непосредственно связанный с созданием в организме человека иммунитета (невосприимчивости) к определенному вирусу с помощью иммунизации и называемый специфической иммунопрофилактикой инфекционных заболеваний. Выделяют два основных варианта иммунопрофилактики:

Активная иммунизация (вакцинация) — после внедрения в организм человека сыворотки (антигена возбудителя или живых ослабленных микроорганизмов) происходит образование особых антител, которые даже при инфицировании препятствуют развитию вирусного заболевания. В настоящее время проводится активная вакцинация против таких вирусных заболеваний как столбняк, коклюш, дифтерия, вирусный гепатит В, полиомиелит, корь, краснуха, эпидпаротит («свинка»), туберкулез.

Пассивная иммунизация предполагает введение в организм готовых антител к определенной инфекции, что применяется для срочной профилактики вирусных заболеваний (экстренная профилактика столбняка).

Программа «Здоровье» включает в себя пропаганду здорового образа жизни, личной гигиены. Просвещает в области поведения человека в условиях возможного заражения различными видами заболеваний путем радио-, телепередач, проведения курсов лекций, семинаров, мероприятий по созданию благоприятных, безопасных условий труда на рабочих местах, в школах, в детских садах.

Очевидно, что предупреждать вирусные заболевания только медицинскими мерами невозможно. В решении создавшейся проблемы необходимо участие экспертов различной научной и практической ориентированности.

1.2 Введение в математическую эпидемиологию

Математические методы для исследования заболеваний были впервые использованы в 1760 году Даниэлем Бернулли, который анализировал с их помощью результативность разнообразных методов прививки против оспы. В 1840 году Уильям Фарр успешно охарактеризовал данные по смертности от оспы в Англии и Уэльсе за промежуток с 1837 по 1839 год кривой нормального распределения. Этот способ был развит Джоном Браунли, напечатавшим в 1906 году статью «Статистический подход к иммунной защите: теория эпидемий» (Brownlee, 1906), в которой он соотносил ряды эпидемиологических данных на основе распределения Пирсона. Два других учёных того времени, Хамер и Росс, использовав одними из первых математическое описание распространения заболеваний, сумели решить задачи по выяснению механизмов систематического повторения эпидемии кори и выявлению взаимосвязи между числом комаров и возникновением малярии. Труды Хамера и Росса, наряду с более поздними работами Росса и Хадсона, Сопера, а также Кермака и Маккендрика (Kermack, McKendrick, 1927), послужили теоретической основой для дальнейших исследований в сфере математического моделирования эпидемий. В упомянутых ра-

ботах для задач эпидемиологии был впервые применён так называемый «закон действующих масс», согласно которому число вновь инфицированных в популяции прямо пропорционально произведению текущих численностей восприимчивых и инфицированных индивидов. Модель Кермака и Маккендрика дала начало широкому применению детерминированных SIR-моделей («Susceptible — Infected — Recovered»), в которых с помощью систем дифференциальных уравнений (непрерывное время) или разностных уравнений (дискретное время) описывается динамика групп восприимчивых, инфицированных и выздоровевших индивидов. В начале двадцатых годов XX века исследователями–эпидемиологами было установлено, что для описания распространения эпидемий внутри небольших групп населения, например, семей (эта задача актуальна для таких заболеваний, как корь), вместо детерминированного описания целесообразнее [7] использовать вероятностное. В 1926 году Маккендрик сформулировал стохастический вариант SIR-модели с непрерывным временем для вывода уравнений, описывающих продолжительность эпидемии, применительно к гриппу и малярии, но его работа не сразу получила признание. Большое влияние на развитие класса моделей с вероятностным описанием оказала работа Гринвуда 1931 года, посвящённая изучению вспышки эпидемии кори, а также модель Рида и Фроста, разработанная авторами примерно в 1928—1930 годах, но опубликованная лишь в 1952 году. В моделях Гринвуда и Рида—Фроста описание численностей инфицированных индивидов на каждом временном промежутке приводило к использованию цепи биномиальных распределений, отсюда возник термин «цепочечно– биномиальные» модели. Долгое время неизвестным являлся факт, что ещё в 1889 году российским врачом–эпидемиологом Петром Дмитриевичем Енько была опубликована модель распространения инфекционного заболевания в дискретном времени, уравнения которой описывают средние значения численностей групп, получаемых в модели Рида—Фроста (Енько, 1889). Модель Енько стала известной благодаря обзору Клауса Дитца и Дитера Шенцле, посвящённому истории применения математических моделей в эпидемиологии. В дальнейших своих работах Дитц и Шенцле обсуждали способы обобщения модели Енько на основе использования различных законов распределений для числа контактов. Публикация Енько была переиздана в 1989 году на английском языке, а сам П. Д. Енько в настоящее время признан первым в истории специалистом по моделированию эпидемий в современном понимании этого слова. Исследования стохастической SIR-модели в непрерывном времени, опубликованные в 1949 году Бартлеттом, положили начало развитию стохастических моделей эпидемических процессов. Помимо более поздних работ Бартлетта (Bartlett, 1978), большой вклад в развитие приложений теории случайных процессов к моделированию эпидемий внесли работы Бейли (Бейли, 1970) и Уиттла. В 1957 году Кендаллом была сформулирована одна из первых пространственных моделей распространения эпидемий на основе уравнений в частных производных (Kendall, 1957). В том же году Бартлетт описывает распространение эпидемии на узлах пространственной структуры размера 6×6, пользуясь методами имитационного моделирования — нового направления, основанного на компьютерном моделировании изучаемых систем с применением численных методов Монте–Карло. В 1971 году Фоксом и Элвбэком с соавторами была опубликована первая индивидуум-ориентированная модель распространения заболевания (Elveback, 1971). Новое направление [8] имитационного моделирования не сразу получило признание в научном сообществе, вероятнее всего из-за недостаточные количества данных для настройки индивидуум-ориентированных моделей и невысокой производительности ЭВМ того времени. Начало и середина 80-х годов были ознаменованы появлением первых математических моделей оценки эффективности различных методов борьбы с раком, в том числе массовых обследований, направленных на обнаружение злокачественных образований. Эти модели разрабатывались как на основе детерминированного, так и на основе вероятностного подходов. Быстрое развитие вычислительных технологий в 80-е — 90-е годы позволило использовать предсказательную силу стохастических дискретных моделей в полном объёме, что привело

к вспышке интереса к индивидууму–ориентированному моделированию динамики заболеваний в неоднородных популяциях на рубеже XX и XXI веков.

1.3 Математические модели процесса распространения заболевания до 1990-го и после 2000-х годов

1.3.1 Модель Барояна-Рвачева

Наиболее известный в отечественных кругах метод моделирования эпидемий основан на использовании дифференциальных уравнений. В этих моделях динамика распространения заболевания описывается системой дифференциальных уравнений, где в качестве переменных состояний выступают числа больных и здоровых людей на моделируемой территории. Решение такой системы уравнений определяет уровень инфекционной заболеваемости в каждый момент времени. Данная методология была разработана в 1960-е гг. в СССР академиком О. В. Барояном и профессором Л. А. Рвачевым. Для ее создания использовался метод научной аналогии эпидемического процесса («перенос» возбудителя инфекции от больных к здоровым) процессу «переноса» материи (энергии, импульса и др.), описываемому уравнениями математической физики.

В модели Барояна — Рвачева и в большинстве других моделей такого типа вся популяция на моделируемой территории делится на группы. Обычно выделяют четыре группы людей:

Susceptible — здоровые люди, восприимчивые к заболеванию (обозначим их количество S);

Exposed — люди, заболевание у которых находится в инкубационном периоде (обозначим их количество E);

Infectious — инфекционные больные (обозначим их количество I);

Recovered — переболевшие моделируемым заболеванием люди, более к нему не восприимчивые (обозначим их количество R).

Приращение числа людей в каждой из выделенных групп можно описать с помощью следующей системы нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\frac{dS(t)}{dt} = -\frac{\lambda}{p(t)} S(t) \int I(t,\tau)d\tau, \qquad (1.1)$$

$$\frac{\partial E(t,\tau)}{\partial t} + \frac{\partial E(t,\tau)}{\partial \tau} = -\gamma(\tau)E(t,\tau), \qquad (1.2)$$

$$\frac{\partial I(t,\tau)}{\partial t} + \frac{\partial I(t,\tau)}{\partial \tau} = \gamma(\tau)E(t,\tau) - \delta(\tau)I(t,\tau), \qquad (1.3)$$

$$\frac{dR(t)}{dt} = \int \delta(\tau)I(t,\tau)d\tau, \qquad (1.4)$$

где t — календарное время развития эпидемии, λ — средняя частота передачи возбудителя от инфицированных больных к чувствительным индивидам, p — численность популяции, τ — локальное время, прошедшее с момента заражения индивида, $\gamma(\tau)$ — функция развития периода инкубации, $\delta(\tau)$ — функция развития инфекционного периода.

В 1960-е — 1970-е гг. модель Барояна—Рвачева была прорывом в области моделирования эпидемий. Модель обладает рядом положительных качеств, позволяющих применять ее и сегодня. Главное достоинство модели — способность достаточно точно отражать некоторые аспекты эпидемии при относительной ее простоте. Благодаря этому, схема может быть легко реализована как в любой системе компьютерной математики, так и на целевом языке программирования. Модель не требует больших вычислительных затрат и эксперименты с ней могут быть проведены почти на любом персональном компьютере. Несмотря на то что модель Барояна—Рвачева создавалась для моделирования распространения гриппа, методология ее построения может быть использована (и уже была использована) для моделирования распространения большинства инфекционных заболеваний.

Модель Барояна—Рвачева породила целое направление в разработке моделей эпидемий. Назовем это направление классическим, традиционным.

1.3.2 Вероятностные популяционные модели

Существуют стохастические, популяционные, аналитические или имитационные, непространственные или пространственные, непрерывные по времени или дискретные вероятностные популяционные модели.

Они предназначены для моделирования процесса распространения заболеваний в однородных или слабо структурированных популяциях с произвольным ко-

личеством индивидов и особенно полезны для моделирования эпидемий в популяциях малых численностей и/или начальных стадий эпидемий с малым числом инфицированных.

Структура: общая идея построения стохастических популяционных SIR- моделей и их обобщений аналогична их детерминированным аналогам: популяция рассматривается как совокупность групп, внутри каждой из которых индивиды считаются неразличимыми между собой. Различие проявляется в описании законов перехода индивидов между группами. В качестве математического аппарата применяются системы стохастических разностных уравнений, цепи Маркова, случайные процессы в дискретном и непрерывном времени (процессы Гальтона—Ватсона, процессы рождения и гибели и пр.).

Достоинства и недостатки: в отличие от детерминированных SIR-моделей, в стохастических имитационных моделях корректно учитывается фактор случайности. В тоже время стохастические популяционные модели сложнее для аналитического исследования по сравнению с аналогичными детерминированными. Полноценное аналитическое исследование возможно лишь для некоторых простых типов моделей. В общем же случае для оценки динамики численностей групп обычно прибегают к имитационному моделированию с помощью методов Монте–Карло. Имитационные модели на базе SIR-моделей обладают высокой производительностью, в результате чего они до сих пор широко применяются в программных комплексах.

Варианты моделей:

1. Модель распространения лихорадки Эбола.

В работе (Lekone, 2006) приводится стохастическая SIR–модель с дискретным временем следующего вида:

$$S(t+h) = S(t) - B(t), \quad (1.5)$$

$$E(t+h) = E(t) + B(t) - C(t), \quad (1.6)$$

$$I(t+h) = I(t) + C(t) - D(t), \quad (1.7)$$

$$S(t) + E(t) + I(t) + R(t) = N, \quad (1.8)$$

где h — шаг по времени (в модели взят за один день),

$B(t) \sim Bin(S(t), P(t))$ — количество восприимчивых индивидов, инфицированных за промежуток времени $(t; t+h]$,

$C(t) \sim Bin(E(t), p_C)$ — количество индивидов, перешедших в активную фазу заболевания за промежуток времени $(t; t+h]$,

$D(t) \sim Bin(I(t), p_R)$ — количество индивидов, удалённых из популяции (вследствие выздоровления или гибели).

Вероятности, являющиеся параметрами распределений приведённых трёх случайных величин, имеют следующее представление:

$$P(t) = 1 - \exp\left(-\frac{\beta(t)}{N} h I(t)\right), \quad p_C = 1 - \exp(-gh), p_R = 1 - \exp(-\gamma h), \quad (1.9)$$

где параметры β(t) — коэффициент интенсивности передачи инфекции,

$1/g$ — средняя продолжительность инкубационного периода,

$1/\gamma$ — средняя продолжительность периода инфицированности.

Описанная модель настраивалась на данные по эпидемии лихорадки Эбола в Демократической республике Конго в 1995 году.

2. Модель распространения ВИЧ с учётом социальной адаптации населения.

Население некоторого региона делится на восемь групп индивидов, отличающихся степенью социальной адаптации, а также наличием или отсутствием заражения ВИЧ–инфекцией. Выделяются следующие группы индивидов:

A1 — социально адаптированные, восприимчивые к ВИЧ,

A2 — восприимчивые с высоким риском развития патологии,

A3 — восприимчивые с установленным хроническим алкоголизмом,

A4 — восприимчивые с установленной наркотической зависимостью,

A5 — социально адаптированные, инфицированные ВИЧ,

A6 — инфицированные с высоким риском развития патологии,

A7 — инфицированные с установленным хроническим алкоголизмом,

A8 — инфицированные с установленной наркотической зависимостью.

Единица времени принята равной одним суткам.

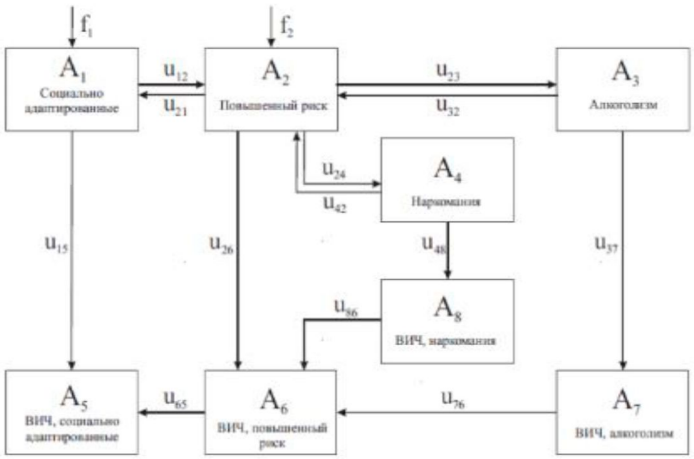


Рис. 1.1. Схема стохастической модели ВИЧ

Система стохастических разностных уравнений имеет следующий вид

$$x_1(t) = \hat{x}_1(t) - u_{12}(t) - u_{15}(t) + u_{21}(t) + f_1(t), \quad (1.9)$$

$$x_2(t) = \hat{x}_2(t) - u_{21}(t) - u_{23}(t) - u_{24}(t) - u_{26}(t) + u_{12}(t) + u_{32}(t) + u_{42}(t) + f_2(t), \quad (1.10)$$

$$x_3(t) = \hat{x}_3(t) - u_{32}(t) - u_{37}(t) + u_{23}(t), \quad (1.11)$$

$$x_4(t) = \hat{x}_4(t) - u_{42}(t) - u_{48}(t) + u_{24}(t), \quad (1.12)$$

$$x_5(t) = \hat{x}_5(t) + u_{15}(t) + u_{65}(t), \quad (1.13)$$

$$x_6(t) = \hat{x}_6(t) - u_{65}(t) + u_{26}(t) + u_{76}(t) + u_{86}(t), \quad (1.14)$$

$$x_7(t) = \hat{x}_7(t) - u_{76}(t) + u_{37}(t), \quad (1.15)$$

$$x_8(t) = \hat{x}_8(t) - u_{86}(t) + u_{48}(t), \quad (1.16)$$

$$x_i(0) = x_i^{(0)},\ i = 1,2,\ldots,8;\ t = 1,2,\ldots,T \quad (1.16)$$

где x_i — численность индивидов группы A_i в момент времени $t = 0, 1, 2\ldots$.

Слагаемые $f_i \geq 0$, $i = 1, 2,\ldots$ отражают приток населения в соответствующие группы за промежуток времени $(t - 1; t]$ и представляют собой некоторые случайные процессы с заданными вероятностными характеристиками. Случайные величины $\hat{x}_i(t)$ означают количество индивидов группы A_j, доживших от момента времени $t - 1$ до момента времени t, случайные величины $u_{jk}(t)$описывают количество индивидов, переходящих из группы A_j в группу A_k в течение промежутка времени $(t - 1; t]$. Законы распределения этих величин задаются следующим образом. Указанные случайные величины имеют биномиальные и мультиномиальные законы распределения с вероятностями, являющимися константами или функциями от параметров модели. Количество вновь инфицированных из групп $A_1, \ldots, A_4$ на каждом отдельном промежутке времени (величины $u_{15}(t)$, $u_{26}(t)$, $u_{37}(t)$, $u_{48}(t)$) задаются похожим образом через биномиальное распределение.

Для примера приведём выражение для количества вновь заражённых социально-адаптированных индивидов: $u_{15}(t) \sim \mathrm{Bin}(\hat{x}_1(t) - u_{12}(t), \mu_{15}(t))$, где $\mu_{15}(t) = 1 - \prod_{j=5}^{8}(1 - r_{1j})^{\hat{x}_j(t)}$ означает вероятность инфицирования индивида группы A_1 за счёт контактов с индивидами групп A_5, A_6, A_7, A_8. Константа r_{1j} задаёт вероятность контакта одного индивида группы A_1 с одним индивидом группы A_j за промежуток времени $(t - 1; t]$, $0 \leq r_{1j} < 1$, $j = 5, \ldots, 8$. Вектор начальных численностей $(x_i^{(0)}, \ldots, x_8^{(0)})$ имеет неотрицательные компоненты и описывается некоторым заданным законом распределения. Из указанной системы уравнений, задающей модель, была получена детерминированная система верхних оценок на математические ожидания численностей групп в популяции. С помощью этой вспомогательной системы было сформулировано достаточное условие затухания инфекции в популяции, выполнение условия было проиллюстрировано с помощью численных экспериментов на основе методов Монте–Карло (Pertsev, Leonenko, 2012).

2. Моделирование процесса распространения заболевания

2.1 Принцип решения задачи оптимального управления

Рассмотрим модель процесса распространения заболевания с элементами управления, предложенную в [1].

Задача оптимального управления для модели, описываемой системой обыкновенных дифференциальных уравнений, ставится следующим образом: требуется найти минимум функционала $J(\omega)$, определенного на заданном отрезке $[t_0, t_1]$, зависящего от процесса $\omega = (x(t), u(t))$, состоящего из интегрального и терминального слагаемых

$$J(\omega) = \int_{t_0}^{t_1} f_0\big(t, x(t), u(t)\big)dt + \\ + \Phi(x(t_0), x(t_1)) \qquad (2.1)$$

где $0 < t_0 < 1$ и значения t_0, t_1 фиксированы. Обозначим далее через $I = [t_0, t_1]$. Абсолютно непрерывная вектор-функция решения $x(t)$: $I \to R^n$ и кусочно-непрерывная вектор-функция управления $u(t)$: $I \to R^n$ удовлетворяют динамическим ограничениям

$$\dot{x}_i(t) = f_i\big(t, x(t), u(t)\big), t \in I, i = \overline{1,n}, \qquad (2.2)$$

начальным условиям

$$x(t_0) \in X_0 \in R^n, \qquad (2.3)$$

ограничениям на управление

$$u(t) \in U(t) \in R^r,\ t \in I \qquad (2.4)$$

граничным условиям

$$x(t_1) \in X_1 \in R^n, \qquad (2.5)$$

Определение 1. Процесс $\omega = (x(t), u(t))$ называется допустимым, если вектор-функция $x(t)$ — абсолютно непрерывна, $u(t)$ — кусочно-непрерывна и удовлетворяет условиям (2.2)—(2.5). Совокупность всех допустимых процессов задачи (2.1)—(2.5) обозначим через множество Ω, которое не пусто.

Задача оптимального управления непрерывной системой (2.2) заключается в выборе допустимого процесса $\overline{\omega} \in \Omega$ минимизирующего функционал (2.1).

Определение 2. Допустимый процесс $\overline{\omega} = (\overline{x}(t), \overline{u}(t))$ является локально-оптимальным в задаче (2.1)—(2.5), если $\exists\ \varepsilon > 0$ такое, что для всех допустимых процессов $\omega = (x(t), u(t)) \in \Omega$, удовлетворяющих условию $||x(t) - \overline{x}(t)||_{c(I)} < \varepsilon$ и для любого $u(t) \in U(t)$, $t \in I$, выполняется неравенство

$$J(\overline{\omega}) \le J(\omega) \qquad (2.6)$$

Теорема о необходимых условиях оптимальности в задаче (2.1)—(2.2) впервые была доказана Понтрягиным Л. С. С каждой задачей оптимального управления можно связать две скалярные функции — функцию Понтрягина и функцию Гамильтона, которые строятся по следующему правилу

$$H(t, x, u, p(t), \lambda_0) = \\ = -\lambda_0 f_0(t, x, u) + (p(t), f(t, x, u)) \qquad 2.7)$$

$$\mathcal{H}(t, x, p(t), \lambda_0) = \max_{u \in U} H(t, x, u, p(t), \lambda_0) \qquad (2.8)$$

Предположим, что в задаче (2.1)—(2.5) выполнены все стандартные условия гладкости, а именно функции

$$f(t, x, u): I \times R^r \times R^n \to R^n \qquad (2.9)$$

$$f_0(t, x, u): I \times R^r \times R^n \to R \qquad (2.10)$$

Измеримая по t, непрерывно дифференцируемая по x и непрерывная по u, функция $\Phi(x^0, x^1)$: $X_0 \times X_1 \to R$ непрерывно дифференцируема по x^0 и x^1, где $x(t_0) = x^0$, $x(t_1) = x^1$.

Если $x(t_0) = x^0$, то задача (2.1)—(2.5) называется задачей с закрепленным левым концом.

Если $X_0 = R^n$, то задача (2.1)—(2.5) называется задачей со свободным левым концом. Аналогично для правого конца можно выделить два случая: закрепленный правый конец $x(t_1) = x^1$, свободный правый конец $X_1 = R^n$. Множества X_l, $l = 0,1$ могут задаваться системой ограничений типа равенств и неравенств. Например

$$X_l = \{x \in R^n: g_i^l(x) \le 0, i = \overline{1,s};\ g_i^l(x) = 0, i = \overline{s+1,p}\} \qquad (2.11)$$

где $g_i(x)$, $i = \overline{1, p}$ — непрерывно дифференцируемые функции.

Применим метод множителей Лагранжа для построения оптимального решения в задаче со свободным правым концом.

Задача оптимального управления с фиксированным правым концом состоит в минимизации функционала

$$J(\omega) = \int_{t_0}^{t_1} f_0\big(t, x(t), u(t)\big)dt + \Phi(x(t_1)) \qquad (2.12)$$

при ограничениях

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)),\ t \in I \tag{2.13}$$

$$x(t_0) = x^0 \in R^n \tag{2.14}$$

$$u(t) \in U(t) \in R^r \tag{2.15}$$

где $x(t)$: $I \to R^n$ — абсолютно непрерывная функция, $u(t)$: $I \to R^r$ — кусочно-непрерывная функция.

В задаче выполнены все стандартные предположения гладкости. Для решения задачи воспользуемся методом множителей Лагранжа. Составим функцию Лагранжа

$$\begin{gathered}\mathcal{L}(x(t), u(t), p(t), \lambda_0, v) = \lambda_0 \int_{t_0}^{t_1} f_0\left(t, x(t), u(t)\right)dt + \lambda_0\Phi\left(x(t_1)\right) + \\ + \int_{t_0}^{t_1}\left(p(t), \dot{x}(t) - f\left(t, x(t), u(t)\right)\right)dt + (v, x(t_0) - x^0),\end{gathered} \tag{2.16}$$

где $p(t)$ — абсолютно непрерывная вектор-функция и $p(t)$: $I \to R^n$.

Введем еще несколько вспомогательных функций

$$\begin{gathered}L(t, x(t), u(t), p(t), \lambda_0) = \lambda_0 f_0\left(t, x(t), u(t)\right) + (p(t), \dot{x}(t) - \\ - f(t, x(t), u(t))),\end{gathered} \tag{2.17}$$

$$l\left(x(t_0), x(t_1)\right) = \lambda_0\Phi\left(x(t_1)\right) + (v, x(t_0) - x^0). \tag{2.18}$$

В этом случае функция Лагранжа (2.16) с учетом определений (2.17)—(2.18) имеет вид

$$\begin{gathered}\mathcal{L}(x(t), u(t), p(t), \lambda_0, v) = \\ = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), u(t), p(t), \lambda_0)dt + l(x(t_0), x(t_1)) \to inf\end{gathered} \tag{2.19}$$

Предположим, что известны функции $\bar{u}(t)$, $\bar{p}(t)$, вектор $\bar{v}$ и значение $\bar{\lambda}_0$, доставляющие минимум функционалу (2.12), тогда задача безусловной минимизации (2.19) эквивалентна задаче Больца относительно функции $x(t)$, в которой необходимое условие или уравнение Эйлера-Лагранжа имеют вид

$$\overline{L_x}(t) - \frac{d}{dt}\overline{L_{\dot{x}}}(t) = 0. \tag{2.20}$$

Здесь $\bar{L}(t) = L\left(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t), \bar{p}(t), \overline{\lambda_0}\right)$ — функция, вычисленная вдоль оптимального процесса, $f(x)$ - $n \times n$-матрица, состоящая из первых производных функции

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}, i, j = \overline{1, n}.$$

Производные от функции Лагранжа имеют вид

$$L_x(t) = \lambda_0 f_{0x}\left(t, x(t), u(t)\right) - f_x^T\left(t, x(t), u(t)\right)p(t), \tag{2.21}$$

$$L_{\dot{x}}(t) = p(t) \tag{2.22}$$

Уравнение Эйлера-Лагранжа (2.20) с учетом (2.21) перепишем в виде

$$\dot{\bar{p}}(t) = \lambda_0 f_{0x}\left(t, \bar{x}(t)\bar{u}(t)\right) - f_x^T\left(t, \bar{x}(t)\bar{u}(t)\right)p(t). \tag{2.23}$$

Это уравнение называется уравнением для сопряженной функции $p(t)$. Составим функцию Понтрягина задачи (2.12)—(2.15)

$$H(t, x, u, p(t), \lambda_0) = -\lambda_0 f_0(t, x, u) + (p(t), f(t, x, u). \tag{2.24}$$

С учетом определения функции Понтрягина уравнение (2.23) запишется следующим образом

$$\dot{\bar{p}}(t) = -\frac{\partial H(t,\bar{x}(t),p(t),\bar{u}(t),\overline{\lambda_0})}{\partial x}. \quad (2.25)$$

Условия трансверсальности в задаче Больца (2.19), учитывая, что $L_{\dot{x}}(t) = p(t)$ примут вид

$$\bar{L}_{\dot{x}}(t_i) = (-1)^i \frac{\partial \bar{l}(\xi^0,\xi^1)}{\partial \xi^i}, \quad (2.26)$$

$$\xi^i = x(t_i), i = 0,1, \quad (2.27)$$

$$\bar{p}(t_i) = (-1)^i \frac{\partial \bar{l}(\xi^0,\xi^1)}{\partial \xi^i}. \quad (2.28)$$

Используя определение функции l, получим

$$\bar{p}(t_0) = v, \quad (2.29)$$

$$\bar{p}(t_1) = -\lambda_0 \frac{\partial \bar{l}(\xi^0,\xi^1)}{\partial \xi^i}. \quad (2.30)$$

Пусть в задаче (2.19) неизвестной является только вектор-функция управления $u(t)$, т. е. задача имеет вид

$$\mathcal{L}\left(x(t),u(t),p(t),\overline{\lambda_0},\bar{v}\right) \to inf, \quad (2.31)$$

$$u(t) \in U(t) \in R^r, t \in I. \quad (2.32)$$

Эта задача есть элементарная задача оптимального управления. Согласно принципу минимума, оптимальное управление удовлетворяет условию

$$L\left(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t),\bar{p}(t),\overline{\lambda_0}\right) = \lambda_0 f_0\left(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t)\right) + (\bar{p}(t),\dot{\bar{x}}(t) - f(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t))) = \min_{u\in U(t)}([f_0(t,\bar{x}(t),u) + (\bar{p}(t),\dot{\bar{x}}(t) - f(t,\bar{x}(t),u))]. \quad (2.31)$$

Преобразуя это выражение с учетом определения функции Понтрягина, получим

$$-H\left(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t),\bar{p}(t),\overline{\lambda_0}\right) = \min_{u\in U(t)}(-H(t,\bar{x}(t),u,\bar{p}(t),\overline{\lambda_0}) \quad (2.32)$$

или

$$H\left(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t),\bar{p}(t),\overline{\lambda_0}\right) = \max_{u\in U(t)} H\left(t,\bar{x}(t),u,\bar{p}(t),\overline{\lambda_0}\right). \quad (2.33)$$

Теорема 1. *Пусть допустимый процесс* $\bar{\omega} = (\bar{x}(t), \bar{u}(t))$ *является оптимальным в задаче (2.12)—(2.15). Тогда оптимальное управление удовлетворяет принципу максимума (2.33), а сопряженная функция* $\bar{p}(t)$ *является решением системы (2.25)—(2.30).*

Рассмотрим теперь задачу оптимального управления со свободным правым концом и фиксированным временем

$$I(\omega) = \int_{t_0}^{t_1} f(t,x,u)dt \to inf, \quad (2.34)$$

$$\dot{x} = \varphi(t,x,u), \quad (2.35)$$

$$u \in U \in R^r, \quad (2.36)$$

$$x(t_0) = x_0 \in R^n. \quad (2.37)$$

Будем предполагать, что в задаче (2.34)—(2.37) выполнены стандартные предположения гладкости. Принцип максимума для такой задачи доказывается не сложно, если предположить, что оптимальное управление кусочно-непрерывно.

Теорема 2. *Пусть* $(\bar{x}(t), \bar{u}(t))$ *— оптимальный процесс в задаче (2.34)—(2.37). Тогда существуют не равные одновременно нулю число* $\lambda_0 \geq 0$ *и вектор-функция* $p(t)$ *такие, что в точках непрерывности оптимальное управление* $\bar{u}(t)$ *удовлетворяет принципу максимума*

$$\left(p(t),\varphi\left(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t)\right)\right) - \lambda_0 f\left(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t)\right) = \max_{u\in U}[\left(p(t),\varphi(t,\bar{x}(t),u)\right) - \lambda_0 f(t,\bar{x}(t),u), \quad (2.38)$$

где сопряженная вектор-функция $p(t)$ *является решением системы*

$$\dot{p} = -\varphi_x^*\left(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t)\right)p + \lambda_0 f_x\left(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t)\right) \quad (2.39)$$

с граничным условием

$$p(t_1) = 0.$$

Прежде всего выясним, что мы должны доказать. Пусть управляемый процесс $(\bar{x}(t), \bar{u}(t))$ оптимален, причем управление $\bar{u}(t)$ кусочно-непрерывно. Тогда по теореме 2 должны существовать, не равные одновременно нулю число $\lambda_0 \geq 0$ и вектор-функция $p(t)$ такие, что:

А) вектор-функция $p(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (2.39) и граничному значению $p(t_1) = 0$;

Б) из условия (2.39) следует, что $\lambda_0 \neq 0$. Если бы λ_0 было равно нулю, то функция $p(t)$ была бы решением уравнения

$$\dot{p} = -\varphi_x^*\big(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)\big)p \qquad (2.40)$$

с граничным условием $p(t_1) = 0$, т. е. $p(t)$ должна была быть тождественно равной нулю. Поэтому случай $\lambda_0 = 0$ не рассматривается и без ограничения общности будем считать, что $\lambda_0 = 1$. Таким образом нам надо убедиться, что равенство

$$\Big(p(t), \varphi\big(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)\big)\Big) - f\big(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)\big) = \max_{u \in U}\big[\big(p(t), \varphi(t, \bar{x}(t), u)\big) - f(t, \bar{x}(t), u)\big] \qquad (2.41)$$

выполняется почти всюду на $[t_0, t_1]$, если $p(t)$ — решение сопряженного уравнения

$$\dot{p} = -\varphi_x^*\big(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)\big)p + f_x\big(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)\big) \qquad (2.42)$$

с условием $p(t_1) = 0$.

Докажем, что равенство (2.41) выполняется в каждой точке непрерывности управления $\bar{u}(t)$, принадлежащей интервалу (t_0, t_1). Доказательство основано на непосредственном применении «игольчатых» вариаций управления $\bar{u}(t)$ и, по существу, представляет собой модификацию доказательства условия Вейерштрасса. Итак, пусть τ — точка непрерывности управления $\bar{u}(t)$. Зафиксируем некоторый вектор $v \in U$ и рассмотрим управление

$$u(t, \tau, \lambda) = u_\lambda(t) = \begin{cases} \bar{u}(t), \text{если } t \notin [\tau - \lambda, \tau) \\ v, \text{если } t \in [\tau - \lambda, \tau), \end{cases} \qquad (2.43)$$

которое называется игольчатой вариацией управления $\bar{u}(t)$. Обозначим через $x_\lambda(t) = x(t, \tau, \lambda)$ решение уравнения (2.35) с начальными условиями (2.37), соответствующее управлению $u_\lambda(t)$. По условию $x_\lambda(t) = \bar{x}(t)$, если $t_0 \le t \le \tau - \lambda$. Кроме того, поскольку задача Коши для уравнения

$$\dot{x} = \varphi(t, x, v) \qquad (2.44)$$

разрешима в окрестности точки $(\tau, \bar{x}(\tau))$, то вектор-функция $x_\lambda(t)$ определена и на отрезке $[\tau - \lambda, \tau]$, если λ достаточно мало.

2.2 Управление процессом распространения заболевания

Управление процессом распространения заболевания строится по следующему принципу. Обозначим через $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ соответственно число людей подверженных заболеванию, инфицированных и выздоравливающих. Пусть функция $f(x, y)$ характеризует число встреч людей подверженных заболеванию (класс 1) и инфицированных людей (класс 2). Свойства этой функции будут описаны ниже. Мы будем рассматривать эту функцию в виде $f(x, y) = \beta xy$. При этом предполагается, что заболевание передается только при встрече инфицированного и здорового человека, а постоянный коэффициент β характеризует частоту встреч людей группы 1 и группы 2.

Динамика процесса распространения эпидемии описывается следующей системой дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = -f(x, y), \dot{y} = f(x, y) - \gamma y, \dot{z} = \gamma y, \gamma > 0, \qquad (2.45)$$

где $\gamma > 0$ — относительная скорость выздоровления, $x(0)$ — начальное количество здоровых людей, $y(0)$ — начальное инфицированных здоровых людей, $z(0)$ — начальное выздоровевших здоровых людей, γy — число людей, которые имеют иммунитет или выздоравливают в результате какого-либо иного процесса, величина γ^{-1} может изменяться от 10 дней (ангина, простуда) до нескольких недель (холера, малярия) или даже месяцев и лет (до 8 лет AIDS).

В общем случае функция $f(x, y)$ обладает следующими свойствами:

$$f(x, y) = 0, \text{если } x = 0 \text{ или } y = 0, \qquad (2.46)$$

$$f(x, y) > 0, \; x, y > 0, \qquad (2.47)$$

$$f_{xx}, f_{yy} \le 0, \; x, y > 0, \qquad (2.48)$$

$$f_x, f_y, f_{xy} > 0, \text{если } x, y > 0. \qquad (2.49)$$

Заметим, что $x + y + z = const$.

В этой работе более подробно остановимся на таком способе управления процессом распространения заболевания, как программа «Здоровье».

Программа «Здоровье» — это комплекс лекций, семинаров, радио-, телепередач, информационных ресурсов и тренингов, посвященных тому, чтобы обучить людей навыкам, необходимым для поддержания здорового образа жизни и предотвращения заражения этих людей различными видами заболеваний.

Постановка задачи оптимального управления в [1] в данном случае имеет вид

$$I\big(u(\cdot)\big) = \int_0^T (y + cu)dt \to inf, \quad (2.50)$$

$$\dot{x} = -\omega(u)f(x,y),\ x(0) = x_0, \quad (2.51)$$

$$\dot{y} = \omega(u)f(x,y) - \gamma y,\ y(0) = y_0, \quad (2.52)$$

$$0 \le u \le u_0, \quad (2.53)$$

$$x(t) \ge 0, y(t) \ge 0, t[0,T]. \quad (2.54)$$

При этом функция $f(x, y)$ будет зависеть также от управляющей функции $u(t)$. Для простоты будем считать, что $f(x, y, u) = \omega(u) f(x, y)$, $0 < \omega(u) \le 1$, $\omega(0) = 1$, $\omega'(u) < 0$, $\omega''(u) \ge 0$, $\omega'''(u) \le 0$.

Из-за недостаточного количества финансовых и технических возможностей, количество проведенных лекций и теле-, радио передач ограничено, т. е. функция управления удовлетворяет условию

$$0 \le u(t) \le u_0, \quad (2.55)$$

где u_0 характеризует максимальное число лекций и теле-, радиопередач которые могут выть проведены в единицу времени. Стоимость заболевания рассчитывается из цены ухода за инфицированными людьми и затрат на проведение лекций и теле-, радиопередач. Принимая стоимость ухода за больными равной единице, запишем общую стоимость эпидемии за фиксированное время T в виде

$$I(u) = \int_0^T \big(y(t) + cu(t)\big)dt. \quad (2.56)$$

Исходя из того, что $f(x,y) = \beta xy, \dot{z} = \gamma y$, а также из (2.51)—(2.52) можно получить

$$\dot{x} = -u\beta xy, \quad (2.57)$$

$$\dot{y} = u\beta xy - \gamma y. \quad (2.58)$$

Составим функцию Понтрягина

$$H = \lambda_0 I(u) + \lambda_1 \dot{x} + \lambda_2 \dot{y} \quad (2.59)$$

и запишем систему дифференциальных уравнений для сопряженных функций

$$\begin{cases} \dot{\lambda_1}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\lambda_1 u\beta y + \lambda_2 u\beta y = u\beta y(\lambda_2 - \lambda_1) \\ \dot{\lambda_2}(t) = -\frac{\partial H}{\partial y} = -1 - \lambda_1 u\beta x + \lambda_2(u\beta x - \gamma) = \\ \qquad = u\beta x(\lambda_2 - \lambda_1) - 1 - \gamma. \end{cases} \quad (2.60)$$

Задача (2.50)—(2.54) является задачей оптимального управления со свободным правым концом, поэтому

$$\lambda_1(T) = \lambda_2(T) = 0, \text{если } x(T) > 0, y(T) > 0. \quad (2.61)$$

Если $\lambda_0 = 0$, то все множители в (2.59) равны нулю одновременно, поэтому в такой постановке у задачи ненулевых решений нет.

Пусть теперь $\lambda_0 = 1$, тогда получим

$$\begin{aligned} H &= -(y + cu) + \lambda_1(-u\beta xy) + \lambda_2(u\beta xy - \gamma y) = \\ &= -(y + cu) - \lambda_1 u\beta xy + \lambda_2 u\beta xy - \lambda_2 \gamma y = \\ &= u(-c - \lambda_1 \beta xy + \lambda_2 \beta xy) - y - \lambda_2 \gamma y = \\ &= u\big(-c + \beta xy(\lambda_2 - \lambda_1)\big) - y - \lambda_2 \gamma y \to max. \end{aligned} \quad (2.62)$$

Обозначим через $\Phi(x, y, \lambda_1, \lambda_2) = -c + \beta xy(\lambda_2 - \lambda_1)$ функцию переключения. Тогда задача примет вид

$$H = u\Phi(x, y, \lambda_1, \lambda_2) - y - \lambda_2 \gamma y \to max. \quad (2.63)$$

Оптимальное управление представимо в виде

$$\bar{u}(t) = \begin{cases} 0, \text{если } \varphi < 0 \\ u_0, \text{если } \varphi > 0 \\ u - \text{любое, если } \varphi = 0. \end{cases} \quad (2.64)$$

Представить решение поставленной задачи в аналитической форме на данном этапе не представляется возможным, поскольку оно не представимо через элементарные функции. Поэтому будем решать задачу численным способом.

Для того чтобы сделать это выберем функцию, удовлетворяющую следующим условиям

$$0 < \omega(u) \le 1, \omega(0) = 1, \omega'(u) < 0, \omega''(u) \ge 0, \omega'''(u) \le 0. \quad (2.65)$$

Пусть, например, функция $\omega(u) = \frac{1}{u+1}$. Предположим, что:

$x_0 = 1000$ — начальное количество здоровых людей равно,

$y_0 = 17$ — инфицированных,

$z_0 = 0$ — выздоровевших пока что нет.

Программа «Здоровье» регулирует количество лекций, курсов, радио-, телепередач в день. Для начала возьмем $u_0 = 80$. Коэффициент β характеризующий частоту встреч здоровых и инфицированных людей возьмем равным отношению числа инфицированных людей к общему количеству здоровых и инфицированных людей

$$\beta = \frac{y}{x+y}. \qquad (2.66)$$

Численное решение задачи управления процессом распространения заболевания рассмотрим на примере ангины. Время выздоровления от ангины равно 10 дням, значит $\gamma^{-1} = 10$, а $\gamma = 1/10$.

С помощью высокоуровневого языка и интерактивной среды для программирования Matlab составим функции необходимые нам для решения задачи

```
function beta = beta(x,y)
beta = y/(x+y);
end
```

beta — функция высчитывающая коэффициент

```
function change_x = change_x(u, x, y)
change_x = (u*beta(x,y)*x*y);
end
```

change_x — функция высчитывающая изменения числа здоровых людей.

```
function change_y = change_y(u, x, y, gamma)
change_y = (u*beta(x,y)*x*y - gamma*y);
end
```

change_y — функция вычисляющая изменения числа инфицированных людей.

```
function change_z = change_z(gamma, y)
change_z = (gamma*y);
end
```

change_z — функция вычисляющая изменение числа выздоровевших людей.

Выполним расчеты и составим график зависимости изменения групп людей от времени.

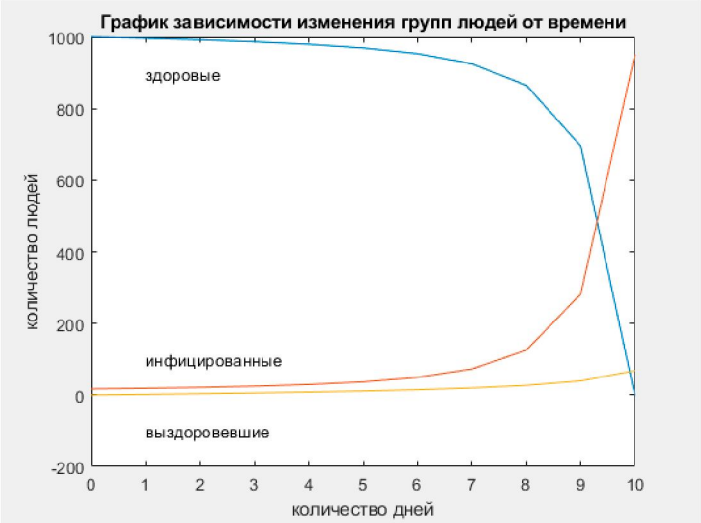


Рис. 1. График зависимости изменения групп людей от времени

На рисунке 1 видно, что при 80 лекциях и радио-, телепередачах в день из тысячи человек за 10 дней от 17 инфицированных заболеют все, при этом 67 человек выздоровеют.

Предположим, что стоимость одной лекции и радио-, телепередачи равно единице, а также, что стоимость ухода за инфицированными людьми равна единице, тогда с помощью функции

```
function change_price = change_price(y, u)
change_price = y+u;
end
```

change_price — вычисляет изменения стоимости эпидемии выполним расчеты и составим график роста стоимости эпидемии.

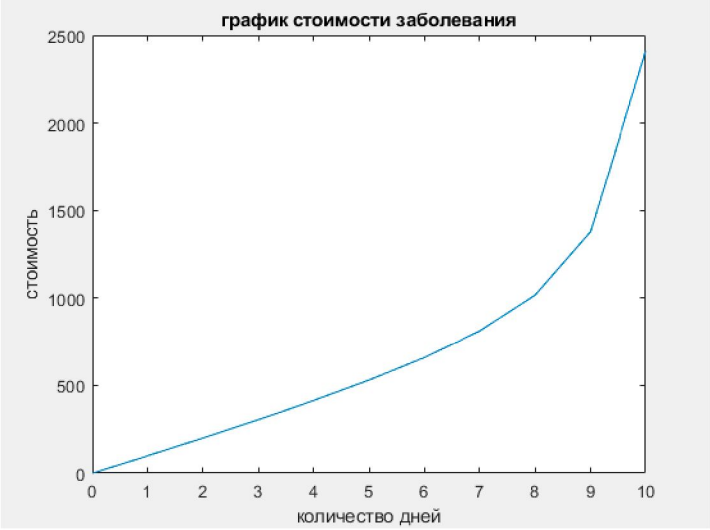


Рис. 2. Стоимость решения первого набора данных

Как видно из рисунка 2, стоимость эпидемии прямо пропорционально зависит от количества инфицированных людей.

Возьмем следующие значения

$x_0 = 1000$ — начальное количество здоровых людей,

$y_0 = 17$ — инфицированных,

$z_0 = 0$ — выздоровевших пока что нет,

$u_0 = 167$ — количество лекций, радио-, телепередач в день.

На основании этих данных проведем вычисления и построим график зависимости изменения групп людей от времени.

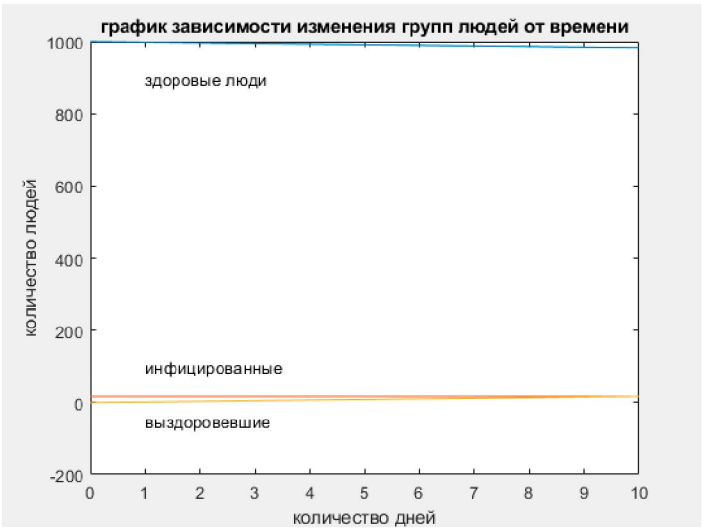


Рис. 3. График зависимости групп людей от времени во втором наборе данных

С такими входными параметрами получаем переходную точку, в которой постепенно начинает уменьшаться количество инфицированных людей. Этот процесс может занять годы и потребует огромного количества ресурсов.

Рассмотрим процесс с другими входными данными

$x_0 = 1000$ — начальное количество здоровых людей равно,

$y_0 = 17$ — инфицированных,

$z_0 = 0$ выздоровевших пока что нет,

$u_0 = 300$ — количество лекций, радио-, телепередач в день.

После вычисления получаем такой график.

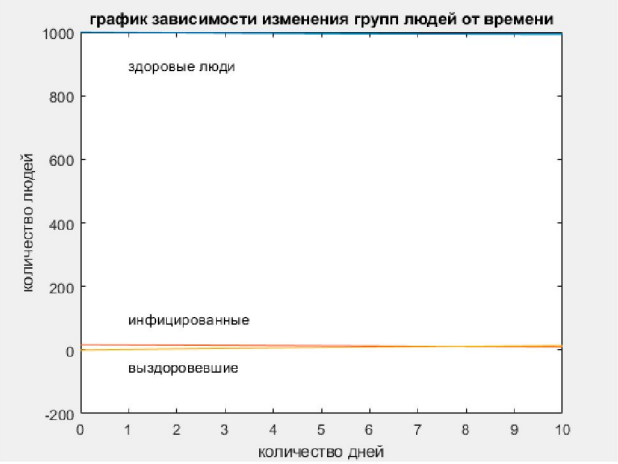


Рис. 4. График зависимости групп людей от времени в третьем наборе данных

С данными входными параметрами, очевидно, что за 10 дней количество инфицированных людей значительно уменьшилось, при этом за этот промежуток времени заразилось всего 7 человек.

В целом этот вариант займет 51 день, потребует 15250 денежных единиц и за это время заболеет всего 9 человек.

Если увеличить отношение инфицированных людей к общему количеству здоровых и инфицированных людей, то придется подбирать большее значение для управляющей функции. Так, например, при параметрах

$x_0 = 1000$ — начальное количество здоровых людей равно,

$y_0 = 60$ — инфицированных,

$z_0 = 0$ — выздоровевших пока что нет

$u_0 = 300$ — количество лекций, радио-, телепередач в день

график зависимости изменения групп людей от времени будет иметь следующий вид.

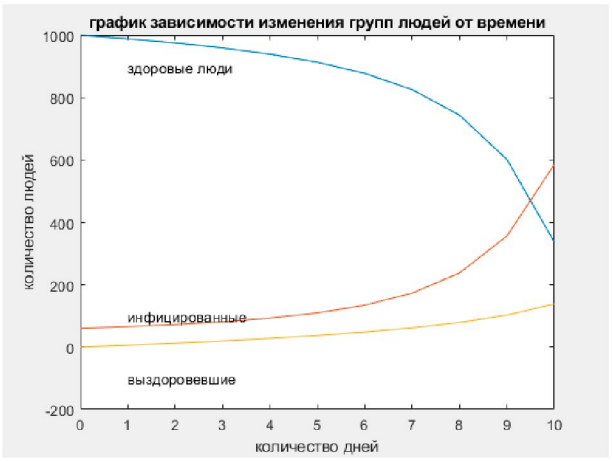


Рис. 5. График зависимости групп людей от времени в 4 наборе данных

Выводы

В представленной работе рассмотрены такие модели процесса распространения заболевания, как модель Барояна - Рвачева и вероятностно популяционная модель. Проведена исследовательская работа по численному моделированию задачи управления процессом заболевания с помощью программы «Здоровье». Очевидно, что при выборе удачных входных данных и благоприятном стечении обстоятельств эта программа показывает довольно высокий уровень эффективности.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Андреева Е. А. Вариационное исчисление и методы оптимизации : учебн. пособие / Цирулёва В. М.* — Тверь : Твер. гос. ун-т, 2001. — 576 с.

2. *Кондратьев М. А.* Применение агентного подхода к имитационному моделированию процесса распространения заболевания / М. А. Кондратьев, Р. И. Ивановский, Л. М. Цыбалова // Научно-технические Ведомости СПбГПУ. Серия «Наука и образование». — 2010. — № 2—2 (100). — С. 189 — 195.

3. *Кондратьев М. А.* Компьютерные исследования и моделирование / М. А. Кондратьев. — СПб., 2013. — Т. 5. № 5. — С. 863—882.

4. *Кондратьев М. А.* Разработка модели распространения инфекционных заболеваний на основе агентного подхода : автореф. дис. ... кандидата технических наук: 05.13.18 / Михаил Александрович Кондратьев ; [Место защиты: С.-Петерб. гос. ун-т аэрокосм. приборостроения]. — СПб., 2012. — 19 с.

5. *Леоненко В. Н.* Математическая эпидемиология : учебно-методическое пособие по выполнению лабораторных работ / В. Н. Леоненко. — СПб. : Университет ИТМО, 2018. — 38 с.

6. *Кондратьев М. А.* Имитационное моделирование в медицине: многоагентная модель распространения гриппа / М. А. Кондратьев // Компьютерные инструменты в образовании. — 2011. — № 4. — С. 32—36.

7. Специфическая профилактика — URL: http://cgon.rospotrebnadzor.ru/content/63/472/

8. Профилактика инфекционных заболеваний — URL: https://xn--l1aks.27.xn--b1aew.xn--p1ai/Poleznaya_informaciya/ %D1 %81 %D0 %B0 %D0 %BD %D0 %B8 %D1 %82 %D0 %B0 %D1 %80 %D0 %BD %D0 %BE-%D0 %BF %D1 %80 %D0 %BE %D1 %81 %D0 %B2 %D0 %B5 %D1 %82 %D0 %B8 %D1 %82 %D0 %B5 %D0 %BB %D1 %8C %D0 %BD %D0 %B0 %D1 %8F- %D1 %80 %D0 %B0 %D0 %B1 %D0 %BE %D1 %82 %D0 %B0

9. Профилактическая медицина — URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/ %D0 %9F %D1 %80 %D0 %BE %D1 %84 %D0 %B8 %D0 %BB %D0 %B0 %D0 %BA %D1 %82 %D0 %B8 %D1 %87 %D0 %B5 %D1 %81 %D0 %BA %D0 %B0 %D1 %8F_ %D0 %BC %D0 %B5 %D0 %B4 %D0 %B8 %D1 %86 %D0 %B8 %D0 %BD %D0 %B0

10. Социальная гигиена и организация здравоохранения — URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/ %D0 %A1 %D0 %BE %D1 %86 %D0 %B8 %D0 %B0 %D0 %BB %D1 %8C %D0 %BD %D0 %B0 %D1 %8F_ %D0 %B3 %D0 %B8 %D0 %B3 %D0 %B8 %D0 %B5 %D0 %BD %D0 %B0_ %D0 %B8_ %D0 %BE %D1 %80 %D0 %B3 %D0 %B0 %D0 %BD %D0 %B8 %D0 %B7 %D0 %B0 %D1 %86 %D0 %B8 %D1 %8F_ %D0 %B7 %D0 %B4 %D1 %80 %D0 %B0 %D0 %B2 %D0 %BE %D0 %BE %D1 %85 %D1 %80 %D0 %B0 %D0 %BD %D0 %B5 %D0 %BD %D0 %B8 %D1 %8F

Воронежский государственный университет

Белоусова Е. П., кандидат физико-математических наук, доцент кафедры системного анализа и управления

E-mail: e.p.belousova@gmail.com