17. О статусе депутата Воронежской областной Думы : закон Воронежской области от 29.08.1994 № 2-з» // Коммуна. — 1994. — 6 сентября.

18. О статусе депутата Воронежской областной Думы : закон Воронежской области от 07.12.2006 № 102-ОЗ» // Молодой коммунар. — 2006. — 16 декабря.

19. О наказах избирателей депутатам Воронежской областной Думы : закон Воронежской области от 22.07.2003 № 41-ОЗ // Коммуна. — 2003. — 9 августа.

20. Статья 1 Федерального закона от 28.08.1995 № 154-ФЗ «Об общих принципах организации местного самоуправления в Российской Федерации» // Собрание законодательства Российской Федерации. — 1995. — № 35. — Ст. 3506.

21. О порядке формирования органов местного самоуправления в Воронежской области и о сроках их полномочий : закон Воронежской области от 10.11.2014 № 149-ОЗ // Молодой коммунар. — 2014. — 14 ноября.

22. О внесении изменений в закон Воронежской области «Избирательный кодекс Воронежской области» : закон Воронежской области от 24.05.2018 № 61-ОЗ. — URL: http://www.pravo.gov.ru, 25.05.2018.

Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте РФ (Воронежский филиал)

Агибалов Ю. В., кандидат экономических наук, профессор кафедры государственного и муниципального управления

E-mail: agibalov@govvrn.ru

УДК 517.977.5:616-036.2

Е. П. Белоусова

УПРАВЛЕНИЕ ПРОЦЕССОМ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ИНФЕКЦИОННЫХ ЗАБОЛЕВАНИЙ В УСЛОВИЯХ ПРИМЕНЕНИЯ ВАКЦИНАЦИИ

Аннотация: *поскольку инфекционные заболевания в условиях большого скопления людей приводят к возникновению эпидемий, то естественно возникает проблема — как бороться с этим явлением, затрачивая наименьшее количество сил и финансовых вложений. В работе предпринята попытка проанализировать этот процесс для нескольких видов заболеваний в условиях роста эпидемии по линейному закону.*

Ключевые слова: *заболевание, инфекция, эпидемия, финансовые ресурсы.*

UDK 517.977.5:616—036.2

E. P. Belousova

MANAGEMENT OF INFECTIOUS DISEASES IN VACCINATION CONDITIONS

Abstract: *since infectious diseases in a large population lead to epidemics, there is naturally a problem — how to combat this phenomenon by spending the least amount of effort and financial investment. The paper attempts to analyze this process for several types of diseases in the context of the growing epidemic by linear law.*

Keywords: *disease, infection, epidemic, financial resources.*

DOI: 10.22394/1997-4469-2019-47-4-224-238

Введение

Различные инфекционные заболевания представляли угрозу для человечества с самого начала их зарождения и многие из них до сих пор продолжают быть опасными.

С давних времен человек пытался понять причины массовых заболеваний, так как человечество столкнулось с эпидемиями незадолго после одомашнивания первых видов животных. Большой вклад в по-

нимание природы инфекционных болезней внесли философы Древней Греции. В пятом веке до нашей эры философ и врач Демокрит сделал предположение, что некоторые болезни распространяются невидимыми крошечными организмами, и в это же время Гиппократ описал ряд инфекционных заболеваний и положил начало первой эпидемиологической теории о миазмах.

Таким образом, эпидемиология как наука существует достаточно давно и благодаря ее успешным исследованиям во многих странах были ликвидированы такие опасные заболевания как, например, чума и сап. Несмотря на это, регулярно происходит не только появление новых болезней, но и продолжаются вспышки уже изученных штаммов.

В век высоких технологий и развитой медицины вирусные заболевания не только продолжают быть угрозой, но и получают достаточно благоприятные условия для своего размножения. Индустриализация привела к росту городов и увеличению плотности населения, а современному взрослому человеку легче снять симптомы своей болезни, чем позаботиться о лечении или своевременно сделать прививку. Поэтому сегодня особенно важно вовремя принимать меры по устранению очагов инфекции и профилактики среди населения. Кроме того, средства для таких мероприятий выделяются из государственного бюджета, что поднимает вопрос еще и о рациональном использовании этих финансовых ресурсов.

Высшая математика, в частности, занимается и задачами подобного рода. С помощью известных оптимизационных методов решение таких задач сводится к нахождению экстремальных значений заданных величин в некоторых ограниченных областях их изменения.

В статье рассмотрена задача об управлении процессом распространения инфекционной болезни в условиях применения вакцинации и минимизации общей стоимости заболевания, в которую входят стоимость вакцины и уход за больными.

1. Постановка задачи

Изучаемая нами математическая модель изложена в [1]. Пусть есть три группы людей: подверженные заболеванию, инфицированные и имеющие иммунитет (т. е. выздоровевшие). Обозначим через *x(t)* число людей, подверженных заболеванию, через *y(t)* — число зараженных и число выздоровевших обозначим как *z(t)*. Общее количество людей в любой момент времени будем считать постоянным. Предположим, что заболевание передается при встрече людей из подверженной заболеванию группы, с инфицированными. Пусть число встреч людей из группы подверженных заболеванию с инфицированными людьми описывается функцией *f(x,y)*, обладающей следующими свойствами:

$$\begin{gathered} f(x,y) = 0, \text{ если } x = 0 \text{ или } y = 0; \\ f(x,y) > 0, \quad x,y > 0; \\ f_{xx},\ f_{yy} \le 0, \quad x,y > 0; \\ f_x, f_y, f_{xy} > 0, \quad x,y > 0. \end{gathered} \tag{1.1}$$

Динамика процесса распространения инфекции описывается с помощью системы дифференциальных уравнений [2]:

$$\begin{gathered} \dot{x} = -f(x,y),\ \ \dot{y} = f(x,y) - \gamma y, \\ \dot{z} = \gamma y,\ \gamma > 0. \end{gathered} \tag{1.2}$$

Значения в начальный момент времени *x(0), y(0), z(0)* известны, относительная скорость выздоровления обозначена как γ, величина γ^{-1} показывает период выздоровления и зависит от вида заболевания.

Будем считать, что для людей, подверженных заболеванию, проводится вакцинация, и уравнение, описывающее динамику числа таких людей, принимает следующий вид:

$$\dot{x} = -f(x,y) - u. \tag{1.3}$$

Как часто бывает, из-за недостаточных финансовых, технических и других возможностей скорость вакцинации ограничена и удовлетворяет неравенству

$$0 \le u(t) \le u_0, \tag{1.4}$$

где u_0 обозначает максимальную скорость вакцинации, т. е. максимальное количество людей, которые за единицу времени могут быть вакцинированы.

Стоимость лечения рассчитывается из суммы затрат на уход за больными, цены вакцины и стоимости введения вакцины. Положим, что затраты по уходу за больными равна единице, а относительную стоимость вакцинации обозначим через c. Таким образом, общие затраты на лечение заболевания за фиксированное время T выразится величиной

$$I(u) = \int_0^T \big(y(t) + cu(t)\big)dt. \tag{1.5}$$

Теперь потребуется построить оптимальное управление $u(t)$, $t \in [0, T]$, которое минимизирует значение функционала (1.5) с учетом ограничений (1.1—1.3).

1.1. Общая формулировка задачи оптимального управления

Приведем сначала некоторые полезные сведения, которые позволят читателю достаточно легко разобраться в тех рассуждениях, которые мы будем приводить далее. Оптимальное управление — это управление, которое обеспечивает достижение максимального значения функционала при соблюдении граничных условий, начальных условий и ограничений на управление.

Задача оптимального управления в общем виде для модели, описанной системой дифференциальных уравнений, звучит следующим образом [3]: требуется минимизировать функционал $J(\omega)$, который определён на заданном отрезке $[t_0, t_1]$ и зависит от процесса $\omega = (x(t), u(t))$ следующим образом

$$J(\omega) = \int_{t_0}^{t_1} f_0\big(t, x(t), u(t)\big)dt + \Phi(x(t_0), x(t_1)). \tag{1.1.1}$$

Функционал состоит из интегрального (первого) и терминального (второго) слагаемых, где значения t_1 и t_0 фиксированные и $0 < t_0 < t_1$. Кусочно-непрерывная вектор-функция управления $u(t)$ и абсолютно непрерывная вектор-функция состояния $x(t)$ должны удовлетворять динамическим ограничениям

$$\dot{x}_i(t) = f_i\big(t, x(t), u(t)\big),\ t\epsilon[t_0, t_1],\ i = \overline{1,n}, \tag{1.1.2}$$

начальным условиям

$$x(t_0) \in X_0 \subset \mathbb{R}^n, \tag{1.1.3}$$

граничным условиям

$$x(t_1) \in X_1 \subset \mathbb{R}^n \tag{1.1.4}$$

и ограничениям на управление

$$u(t) \in U(t) \subset \mathbb{R}^r, \quad t\epsilon[t_0, t_1].. \tag{1.1.5}$$

Таким образом, задача оптимального управления непрерывной системой (1.1.2) заключается в нахождении допустимого процесса $\overline{\omega}$, который минимизирует функционал (1.1.1).

Допустимый процесс $\overline{\omega} = (\overline{x}(t), \overline{u}(t))$ называется локально-оптимальным для задачи (1.1.1)—(1.1.5), если найдется $\varepsilon > 0$ такое, что для всех допустимых процессов $\omega = (x(t), u(t))$,

которые удовлетворяют условию $||(x(t) - \bar{x}(t)||_{c(I)} < \varepsilon$, для любого $t \in I = [t_0, t_1]$, $u(t) \in U(t)$ выполняется следующее неравенство

$$J(\bar{\omega}) \leq J(\omega).$$

Любая задача оптимального управления связана со скалярной функцией Понтрягина, которая строится по следующему правилу

$$H(t, x, u, p(t), \lambda_0) = -\lambda_0 f_0(t, x, u) + \big(p(t), f(t, x, u)\big),$$
$$\widetilde{H}(t, x, p(t), \lambda_0) = \max_{u \in U} H(t, x, u, p(t), \lambda_0).$$

Будем считать, что в задаче (1.1.1—1.1.5) выполнены следующие условия: *f(t, x, u)* и $f_0(t, x, u)$ измеримы по *t*, непрерывны по *u* и непрерывно дифференцируемы по *x*, а функция $\Phi(x^0, x^1) : X_0 \times X_1 \to \mathbb{R}$ непрерывно дифференцируема по $x(t_0) = x^0$ и $x(t_1) = x^1$, то есть выполнены все стандартные условия гладкости.

Задача (1.1.1—1.1.5) называется задачей с закрепленным левым концом, если $x(t_0) = x^0$, или задачей со свободным левым концом, если $X_0 = \mathbb{R}^n$. Аналогично, задача (1.1.1—1.1.5) называется задачей с закреплённым правым концом, если $x(t_1) = x^1$, и со свободным правым концом, если $X_1 = \mathbb{R}^n$.

Рассмотрим далее подробно задачу оптимального управления со свободным правым концом. Такая задача состоит в минимизации следующего функционала

$$J(\omega) = \int_{t_0}^{t_1} f_0\big(t, x(t), u(t)\big)dt + \Phi(x(t_1)) \tag{1.1.6}$$

при ограничениях

$$\dot{x}(t) = f\big(t, x(t), u(t)\big), \ t \epsilon [t_0, t_1], \tag{1.1.7}$$

$$x(t_0) = x^0 \subset \mathbb{R}^n, \tag{1.1.8}$$

$$u(t) \in U(t) \subset \mathbb{R}^r, \tag{1.1.9}$$

где *x(t)* — абсолютно непрерывная функция, а *u(t)*— кусочно-непрерывная функция.

В этой задаче выполнены стандартные условия гладкости, указанные в работе [4], поэтому составим функцию Лагранжа

$$\mathcal{L}(x(t), u(t), p(t), \lambda_0, v) = \lambda_0 \int_{t_0}^{t_1} f_0\big(t, x(t), u(t)\big)dt + \\ +\lambda_0 \Phi\big(x(t_1)\big) + \\ + \int_{t_0}^{t_1} (p(t), \dot{x}(t) - f(t, x(t), u(t)))dt + (v, x(t_0) - x^0), \tag{1.1.10}$$

где *p(t)* — это абсолютно-непрерывная вектор-функция, *v* — это вектор.

Введем в рассмотрение следующие функции:

$$L(x(t), u(t), p(t), \lambda_0) = \lambda_0 f_0\big(t, x(t), u(t)\big) + \\ +(p(t), \dot{x}(t) - f(t, x(t), u(t))), \tag{1.1.11}$$

$$l\big(x(t_0), x(t_1)\big) = \lambda_0 \Phi\big(x(t_1)\big) + (v, x(t_0) - x^0). \tag{1.1.12}$$

Таким образом, с учетом (1.1.11), (1.1.12) функция Лагранжа (1.1.10) примет вид

$$\mathcal{L}(x(t),u(t),p(t),\lambda_0,v) = \lambda_0 \int_{t_0}^{t_1} L(t,x(t),u(t),p(t),\lambda_0)dt \quad + \\ + l\big(x(t_0),x(t_1)\big) \to inf. \tag{1.1.13}$$

Предположим, что функции $\overline{p}(t)$, $\overline{u}(t)$, вектор $\overline{v}$ и значение $\overline{\lambda}_0$ известны, и на них достигается минимум функционала (1.1.6). В таком случае, задача минимизации (1.1.13) эквивалентна относительно функции $x(t)$ задаче Больца, в которой уравнение Эйлера-Лагранжа имеет вид

$$\overline{L_x}(t) - \frac{d}{dt}\overline{L_{\dot{x}}}(t) = 0, \tag{1.1.14}$$

где $\overline{L(t)} = L\big(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t),\bar{p}(t),\bar{\lambda}_0\big)$ — это функция, которая была вычислена вдоль оптимального процесса. Тогда

$$L_x(t) = \lambda_0 f_{0x}\big(t,x(t),u(t)\big) - f_x^T\big(t,x(t),u(t),p(t)\big), \tag{1.1.15}$$

$$L_{\dot{x}}(t) = p(t). \tag{1.1.16}$$

Здесь $f(x)$ — матрица порядка n × n, которая состоит из первых производных функций $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, $i,j = \overline{1,n}$.

С учетом (1.1.15) уравнение Эйлера-Лагранжа (1.1.14) примет вид

$$\dot{\bar{p}}(t) = \lambda_0 f_{0x}\big(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t)\big) - f_x^T\big(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t),p(t)\big). \tag{1.1.17}$$

Уравнение (1.2.12) является уравнением для сопряженной функции $p(t)$.

Составим функцию Понтрягина для задачи (1.1.6)—(1.1.9) в виде

$$H(t,x,u,p(t),\lambda_0) = -\lambda_0 f_0(t,x,u) + \big(p(t),f(t,x,u)\big).$$

Уравнение для сопряженной функции $p(t)$ (1.1.17) с учетом определения функции Понтрягина перепишется в следующем виде

$$H(t,x,u,p(t),\lambda_0) = -\lambda_0 f_0(t,x,u) + \big(p(t),f(t,x,u)\big). \tag{1.1.18}$$

Выпишем условия трансверсальности для задачи Больца (1.1.13), с учетом (1.1.16)

$$\overline{L_{\dot{x}}}(t_i) = (-1)^i \frac{\partial \bar{l}(x(t_0),x(t_1))}{\partial x(t_i)}, i = 0,1,$$

$$\dot{\bar{p}}(t) = (-1)^i \frac{\partial \bar{l}(x(t_0),x(t_1))}{\partial x(t_i)}.$$

Зная, что функция $l(x(t_0), x(t_1))$ непрерывно дифференцируема по каждому аргументу, получим

$$\bar{p}(t_0) = v,$$

$$\bar{p}(t_1) = -\lambda_0 \frac{\partial l(x(t_0),x(t_1))}{\partial x(t_1)}. \tag{1.1.19}$$

Если в задаче (1.1.13) является неизвестной только вектор-функция управления $u(t)$, то задача будет выглядеть следующим образом:

$$\mathcal{L}\big(x(t), u(t), p(t), \overline{\lambda_0}, \bar{v}\big) \to inf,$$
$$u(t) \in U(t) \subset \mathbb{R}^r, \qquad t\epsilon[t_0, t_1].$$

Она является элементарной задачей оптимального управления. Очевидно, что оптимальная управляющая функция должна удовлетворять условию

$$L\big(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t), \bar{p}(t), \bar{\lambda}_0\big) =$$
$$= \lambda_0 f_{0x}\big(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)\big) + \Big(\bar{p}(t), \dot{\bar{x}}(t) - f\big(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)\big)\Big) =$$
$$= \min_{u\in U(t)} [\lambda_0 f_0(t, \bar{x}(t), u) + \Big(\bar{p}(t), \dot{\bar{x}}(t) - f(t, \bar{x}(t), u)\Big)].$$

Пользуясь определением функции Понтрягина, перепишем это выражение другим способом и получим

$$H\big(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t), \bar{p}(t), \bar{\lambda}_0\big) = \max_{u\in U(t)} H\big(t, \bar{x}(t), u, \bar{p}(t), \bar{\lambda}_0\big). \tag{1.1.20}$$

1.2. Принцип максимума Понтрягина для задачи со свободным правым концом

Звучит он следующим образом: пусть в задаче (1.2.1)—(1.2.4) допустимый процесс $\overline{\omega} = (\bar{x}(t), \bar{u}(t))$ *является оптимальным. Тогда сопряженная функция* $\bar{p}(t)$ *является решением системы уравнений (1.2.13) — (1.2.14) и оптимальное управление удовлетворяет принципу максимума (1.2.15).*

Покажем, что принцип максимума Понтрягина применим к задаче оптимального управления со свободным правым концом и фиксированным временем. Рассмотрим следующую задачу

$$I(\omega) = \int_{t_0}^{t_1} f_0(t, x, u)dt \to inf, \tag{1.2.1}$$

$$\dot{x} = \varphi(t, x, u), \tag{1.2.2}$$

$$u \in U \subset \mathbb{R}^r, \tag{1.2.3}$$

$$x(t_0) = x_0 \subset \mathbb{R}^n. \tag{1.2.4}$$

Предположим, что в такой постановке (1.2.1) — (1.2.4) выполнены стандартные предположения гладкости, и оптимальное управление для этой задачи кусочно-непрерывно. Тогда для доказательства того, что принцип максимума Понтрягина в этом случае корректно применим, воспользуемся следующей ***теоремой:*** *пусть* $(\bar{x}(t), \bar{u}(t))$ *— это оптимальный процесс для (1.2.1)—(1.2.4). Тогда существуют не равные одновременно нулю вектор-функция* $p(t)$ *и число* $\lambda_0 \geq 0$ *такие, что в точках непрерывности оптимальное управление* $\bar{u}(t)$ *удовлетворяет принципу максимума [5]*

$$\Big(p(t), \varphi\big(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)\big)\Big) - \lambda_0 f\big(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)\big) =$$
$$= \max_{u\in U}\big[\big(p(t), \varphi(t, \bar{x}(t), u)\big) - \lambda_0 f(t, \bar{x}(t), u)\big], \tag{1.2.5}$$

где сопряженная вектор-функция $p(t)$ *является решением системы (1.2.6) с граничным условием* $p(t_1) = 0$ *вида*

$$\dot{p} = -\varphi_x^*\big(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)\big)p + \lambda_0 f_x\big(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)\big). \tag{1.2.6}$$

Предположим, что управляемый процесс $(\bar{x}(t), \bar{u}(t))$ является оптимальным, при этом управление $\bar{u}(t)$ кусочно-непрерывно. Тогда, в соответствии с приведенной выше теоремой, должны существовать не равные одновременно нулю вектор-функция $p(t)$ и число $\lambda_0 \geq 0$ такие, что вектор-функция $p(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (1.2.6) и граничному условию $p(t_1) = 0$, при этом $\lambda_0 \neq 0$. Как видно из условия (1.2.6), если $\lambda_0 = 0$, то вектор-функция $p(t)$ является решением уравнения

$$\dot{p} = -\varphi_x^*\big(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)\big)p \tag{1.2.7}$$

с граничным условием $p(t_1) = 0$, то есть $p(t)$ тождественно равна нулю. Таким образом, случай, при котором $\lambda_0 = 0$, исключается из рассмотрения, и можно полагать, что $\lambda_0 = 1$. Перепишем равенство (1.2.5) следующим образом

$$\begin{aligned}\Big(p(t), \varphi\big(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)\big)\Big) - f\big(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)\big) = \\ = \max_{u \in U}\big[\big(p(t), \varphi(t, \bar{x}(t), u)\big) - f(t, \bar{x}(t), u)\big].\end{aligned} \tag{1.2.8}$$

Покажем, что равенство (1.2.8) выполняется почти всюду на отрезке $[t_0, t_1]$, если $p(t)$ является решением сопряженного уравнения

$$\dot{p} = -\varphi_x^*\big(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)\big)p + f_x\big(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)\big) \tag{1.2.9}$$

с граничным условием $p(t_1) = 0$.

Пусть τ — точка непрерывности управления $\bar{u}(t)$. Зафиксируем некоторый вектор $v \in U$ и рассмотрим игольчатую вариацию управления $\bar{u}(t)$

$$u(t, \tau, \lambda) = u_\lambda(t) = \begin{cases}\bar{u}(t), & \text{если } t \notin [\tau - \lambda, \tau), \\ v, & \text{если } t \in [\tau - \lambda, \tau).\end{cases} \tag{1.2.10}$$

Обозначим через $x_\lambda(t) = x(t, \tau, \lambda)$ решение системы (1.2.2) и (1.2.4) для управлении $u_\lambda(t)$. По условию, если $t_0 \leq t \leq \tau - \lambda$, то $x_\lambda(t) = \bar{x}(t)$. Так как задача Коши для уравнения $\dot{x} = \varphi(t, x, v)$ разрешима в окрестности точки $(\tau, \bar{x}(\tau))$, то вектор-функция $x_\lambda(t)$ определена на отрезке $[\tau - \lambda, \tau]$, при условии, что число λ достаточно мало.

Если управление $\bar{u}(t)$ непрерывно в точке τ, то оно непрерывно и в некоторой её λ-окрестности. Поэтому в этой окрестности функция $\dot{\bar{x}}(t)$ тоже непрерывна и, следовательно,

$$\begin{aligned}\bar{x}(\tau) = x(\tau - \lambda) + \lambda\dot{\bar{x}}(\tau - \lambda) + o(\lambda) = \\ = x(\tau - \lambda) + \lambda\varphi\big(\tau - \lambda, \bar{x}(\tau - \lambda), \bar{u}(\tau - \lambda)\big) + o(\lambda).\end{aligned}$$

Кроме того

$$x_\lambda(\tau) = \bar{x}(\tau - \lambda) + \lambda\varphi\big(\tau - \lambda, \bar{x}(\tau - \lambda), \bar{u}(\tau - \lambda)\big) + o(v).$$

Отсюда следует, что существует функция

$$\begin{aligned}y(\tau) = \lim_{\lambda \to 0}\frac{x_\lambda(\tau) - \bar{x}(\tau)}{\lambda} = \\ = \varphi(\tau, \bar{x}(\tau), v) - \varphi(\tau, \bar{x}(\tau), u(\tau)).\end{aligned} \tag{1.2.11}$$

На отрезке $[\tau, t_1]$ функции $\bar{x}(t)$ и $x_\lambda(t)$ удовлетворяют уравнению

$$\dot{x} = \varphi(t, x, \bar{u}(t)).$$

Из теоремы о дифференцируемости и непрерывности решения дифференциального уравнения по начальным данным [6] следует, что при достаточно малых $\lambda > 0$ вектор-функции $x_\lambda(t)$ определены на $[\tau, t_1]$, сходятся равномерно к $\bar{x}(t)$ и предел

$$y(t) = \lim_{\lambda \to 0}\frac{x_\lambda(t) - \bar{x}(t)}{\lambda}$$

существует при всяком t ∈ [τ, t_1]. Таким образом, при $t > \tau$ имеем

$$x_\lambda(t) = x_\lambda(\tau) + \int_\tau^t \varphi\big(s, x_\lambda(s), \bar{u}(s)\big)ds, \tag{1.1.12}$$

$$\bar{x}(t) = \bar{x}(\tau) + \int_\tau^t \varphi\big(s, \bar{x}(s), \bar{u}(s)\big)\,ds. \tag{1.1.13}$$

Вычитая из равенства (1.2.12) равенство (1.2.13) получим

$$\frac{x_\lambda - \bar{x}(t)}{\lambda} = \frac{x_\lambda - \bar{x}(\tau)}{\lambda} + \int_\tau^t \frac{\varphi\big(s, x_\lambda(s), \bar{u}(s)\big) - \varphi\big(s, \bar{x}(s), \bar{u}(s)\big)}{\lambda}\,ds. \tag{1.1.14}$$

Переходя одновременно в левой и правой части этого соотношения к пределу при $\lambda \to 0$ имеем

$$y(t) = y(\tau) + \int_\tau^t \varphi_x\big(s, \bar{x}(s), \bar{u}(s)\big)y(s)ds. \tag{1.2.15}$$

Заметим, что такой переход к пределу под знаком интеграла возможен, поскольку φ непрерывно дифференцируема по x, и $\bar{u}(t)$ — ограниченная вектор-функция.

Таким образом, на отрезке [τ, t_1] полученное равенство $y(t)$ является решением уравнения

$$\dot{y} = \varphi_x\big(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)\big)y$$

с начальными условиями (1.2.11).

При $t \geq \tau$ получим следующее равенство

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}\big(p(t), y(t)\big) = \big(\dot{p}(t), y(t)\big) + \big(p(t), \dot{y}(t)\big) = \\ = -\varphi_x^*(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)p(t), y(t)) + (f_x\big(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t), y(t)\big) + \\ +(p(t), \varphi_x(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)y(t)) = \Big(f_x\big(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t), y(t)\big)\Big).\end{gathered}$$

Далее, используя условие $p(t_1) = 0$, вычислим

$$\big(p(t), y(t)\big) = -\int_t^{t_1} \Big(f_x\big(s, \bar{x}(s), \bar{u}(s)\big)y(s)\Big)\,ds. \tag{1.2.16}$$

В частности, согласно (1.2.11) имеем

$$\begin{gathered}\Big(p(\tau), \varphi\big(\tau, \bar{x}(\tau), \bar{u}(\tau)\big) - \varphi(\tau, \bar{x}(\tau), v)\Big) = \\ = \int_\tau^{t_1} f_x\big(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t), y(t)\big)dt.\end{gathered} \tag{1.2.17}$$

Поскольку процесс $(\bar{x}(t), \bar{u}(t))$ является оптимальным, то справедливо неравенство

$$\lim_{\lambda \to 0} \lambda^{-1}[J\big(x_\lambda(\cdot), u_\lambda(\cdot)\big) - J(\bar{x}(\cdot), \bar{u}(\cdot))] \geq 0.$$

Посчитав этот предел, получим следующее

$$\lim_{\lambda\to 0}\lambda^{-1}\int\limits_{\substack{\tau\to\lambda\\ t_1}}^{\tau}\left[f(t,x_\lambda(t),v)-f\left(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t)\right)\right]dt+$$

$$+\lim_{\lambda\to 0}\lambda^{-1}\int\limits_{\tau}^{t_1}\left[f\left(t,x_\lambda(t),\bar{u}(t)\right)-f\left(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t)\right)\right]dt=$$

$$=f(\tau,\bar{x}(\tau),v)-f\left(\tau,\bar{x}(\tau),\bar{u}(\tau)\right)+\int\limits_{\tau}^{t_1}\left(f_x\left(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t)\right)y(t)\right)dt.$$

Отсюда, использую равенство (1.2.17), имеем

$$\left(p(\tau),\varphi\left(\tau,\bar{x}(\tau),\bar{u}(\tau)\right)\right)-f\left(\tau,x(\tau),\bar{u}(\tau)\right)\geq$$
$$\geq\left(p(\tau),\varphi(\tau,\bar{x}(\tau),v)\right)-f(\tau,x(\tau),v).$$

Заметим, что τ — это произвольная точка переключения управления $\bar{u}(\tau)$, а v — произвольный элемент из множества U. Из этого следует, что соотношение (1.2.8) выполняется во всех точках непрерывности управления $\bar{u}(\tau)$, что и требовалось доказать.

2.1. Поиск оптимального управления

Запишем условие задачи, описанной в предыдущей части нашей работы. Требуется минимизировать функционал (2.1.1) при начальных условиях (2.1.2), заданном ограничении на управление (2.1.3) и с учетом дифференциальной системы уравнений (2.1.4), описывающей динамику процесса. Таким образом, имеем

$$I(u)=\int\limits_0^T\left(y(t)+cu(t)\right)dt\to inf, \tag{2.1.1}$$

$$x(0)=x_0,\ y(0)=y_0, \tag{2.1.2}$$

$$0\leq u(t)\leq u_0, \tag{2.1.3}$$

$$\begin{cases}\dot{x}=-f(x,y)-u,\\ \dot{y}=f(x,y)-\gamma y.\end{cases} \tag{2.1.4}$$

Для решения этой задачи будем использовать принцип максимума. Для этого необходимо составить функцию Понтрягина для задачи (2.1.1) — (2.1.4), которая примет следующий вид

$$H=-\lambda_0(y+cu)-\lambda_1(f+u)+\lambda_2(f-\gamma y)\to max, \tag{2.1.5}$$

где $\lambda_0\geq 0$.

Как было показано ранее, при $\lambda_0=0$ все множители равны нулю одновременно, поэтому задача решений иметь не будет. Полагая $\lambda_0=1$ подставим это значение в уравнение и раскроем скобки

$$\begin{gathered}H=-(y+cu)-\lambda_1(f+u)+\lambda_2(f-\gamma y)=\\ =-y+(-cu-\lambda_1u)+\lambda_2(f-\gamma y)-\lambda_1f=\\ =-y-\lambda_1f+(-\mathrm{c}-\lambda_1)u\to max,\ \text{при}\ 0\leq u(t)\leq u_0.\end{gathered} \tag{2.1.6}$$

Основываясь на функции (2.1.5), получим необходимое условие оптимальности для задачи с подвижным концом, называемое условием трансверсальности. Запишем систему дифференциальных уравнений для сопряженных функций в общем виде

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_1 = -\dfrac{\partial \mathrm{H}}{\partial x}, \\ \dot{\lambda}_2 = -\dfrac{\partial \mathrm{H}}{\partial y}. \end{cases}$$

Для полученной ранее функции Понтрягина эта система примет следующий вид

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_1 = \lambda_1 f_x' - \lambda_2 f_x' = (\lambda_1 - \lambda_2) f_x', \\ \dot{\lambda}_2 = \lambda_0 + \lambda_1 f_y' - \lambda_2 f_y' + \lambda_2 \gamma, \end{cases} =>$$

$$=> \begin{cases} \dot{\lambda}_1 = = (\lambda_1 - \lambda_2) f_x', \\ \dot{\lambda}_2 = \lambda_0 + (\lambda_1 - \lambda_2) f_y' + \lambda_2 \gamma. \end{cases} \qquad (2.1.7)$$

Поставленная задача является задачей со свободным правым концом, так как отсутствуют граничные условия $x(T) = x_T$, $y(T) = y_T$. Заметим, что в данном функционале отсутствует дополнительное терминальное слагаемое, поэтому условия трансверсальности примут вид

$$\lambda_1(T) = \lambda_2(T) = 0, \text{ если } x(T) > 0,\ y(T) > 0$$

Далее требуется из принципа максимума найти оптимальное управление. Для этого продифференцируем функцию Понтрягина (2.1.6) по переменной u и получим функцию, которую принято называть функцией переключения

$$\varphi(t) = -\mathrm{c} - \lambda_1. \qquad (2.1.8)$$

Теперь с помощью $\varphi(t)$ оптимальное управление представимо в следующем виде скачковой вариации управления

$$u(t) = \begin{cases} u_0, \text{ если } \varphi(t) > 0, \\ 0, \text{ если } \varphi(t) < 0. \end{cases} \qquad (2.1.9)$$

Заметим, что если на некотором интервале времени функция переключения $\varphi(t) = 0$, то оптимальное управление не определено и может принимать любое значение из отрезка $[0, u_0]$.

Таким образом, решение задачи (2.1.1) — (2.1.4) сводится к решению системы уравнений

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_1 = = (\lambda_1 - \lambda_2) f_x', \\ \dot{\lambda}_2 = \lambda_0 + (\lambda_1 - \lambda_2) f_y' + \lambda_2 \gamma, \\ \dot{x} = -f(x, y) - u, \\ \dot{y} = f(x, y) - \gamma y, \\ x(0) = x_0, \\ y(0) = y_0, \end{cases} \qquad (2.1.10)$$

из которой требуется получить λ_1, поскольку от этой переменной зависит оптимальное управление. Заметим, что для λ_1 и λ_2 нет условий на левом конце временного отрезка, т. е. при $t = 0$.

2.2. *Метод золотого сечения для нахождения точки переключения*

В нашей работе для нахождения точки переключения оптимального управления будет использован метод золотого сечения. В основе этого метода используется принцип разбиения отрезка в пропорциях золотого сечения для построения итерационной последовательности. Метод золотого сечения используется для нахождения экстремума в задачах одномерной оптимизации [7].

Алгоритм решения задачи (2.1.1) — (2.1.4) методом золотого сечения строится следующим образом:

1) отрезок [0, T], который соответствует в задаче рассматриваемому периоду времени, делится в пропорции золотого сечения в обоих направлениях, т. е. выбираются две точки τ_1 и τ_2 такие, что

$$\frac{T}{T-\tau_1} = \frac{T}{\tau_2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

2) аналогично (2.1.8) для этих двух предполагаемых точек переключения составляется скачковое управление следующего вида:

$$u_1(t) = \begin{cases} u_0, & 0 \le t < \tau_1, \\ 0, & \tau_1 < t \le T, \end{cases}$$
$$u_2(t) = \begin{cases} u_0, & 0 \le t < \tau_2, \\ 0, & \tau_2 < t \le T, \end{cases}$$

3) полученное управление подставляется в систему (2.1.4), которая решается при $u_1(t)$ и $u_2(t)$. Результатом решения являются массивы значений $y_1[t]$ и $y_2[t]$ при $0 \le t < T$,

4) для вычисления общей стоимости лечения с учетом полученного скачкового управления ($u_1(t)$, $u_2(t)$) функционал распадается на два слагаемых

$$I_i(u_i) = \int_0^{\tau_i} y_i(t)dt + \int_{\tau_i}^{T} \big(y_i(t) + cu_i(t)\big)dt, \quad i = 1,2 \quad ,$$

где первый интеграл соответствует отрезку времени, на котором вакцинация не происходит, а вторая часть — с введением вакцинации. Затем происходит интегрирование методом трапеций, причем для каждой точки отрезка интегрирования в это уравнение подставляется значение из соответствующего массива значений $y_1[t]$ и $y_2[t]$.

5) на этом этапе происходит проверка результатов интегрирования. Если неравенство $|I_1 - I_2| < \varepsilon$ выполняется, то можно сделать вывод, что точка τ_1 является искомой точкой переключения для приближенного оптимального управления $u^*(t)$. Иначе, следует выяснить, какое из вычисленных значений больше. Если $I_2 < I_1$, тогда правый край рассматриваемого отрезка сдвигается влево, в точку τ_2, поскольку требуется найти минимальную стоимость заболевания. Если $I_2 > I_1$, тогда левый конец рассматриваемого отрезка сдвигается вправо, в точку τ_1. Благодаря этому происходит отсеивание промежутков времени, на которых $I(u)$ не достигает минимального значения,

6) новый укороченный отрезок снова делится в пропорциях золотого сечения, строится новое управление и вычисляется новая стоимость заболевания, которая будет сравниваться с ранее полученной, пока не будет выполнено неравенство $|I_i - I_{i+1}| < \varepsilon$.

Данный алгоритм позволяет решить задачу (2.1.1) — (2.1.4) без использования условий трансверсальности (2.1.7) и вычисления функции переключения (2.1.8). Чем дальше предполагаемые точки переключения находятся от искомой точки, тем больше разность вычисляемых значений функционалов. Следовательно, вышеприведенный алгоритм обеспечивает нахождение приближенного решения для поставленной задачи.

3. Результаты

Программа для решения поставленной задачи написана на языке Python в среде разработки JetBrains PyCharm Community Edition 2018.2.4 x64 с использованием математических библиотек math, scipy.integrate [8], matplotlib.pyplot [9] и numpy [10].

Для демонстрации работы программы рассмотрим результаты, полученные при различных начальных параметрах:

- *x(0)* — количество подверженных заболеванию в начальный момент времени,
- *y(0)* — количество инфицированных в начальный момент времени,
- T — рассматриваемый период времени,
- u_0 — максимальное количество людей, которых можно вакцинировать за один день,
- β — вероятность встречи больного с человеком, который подвержен заболеванию,
- γ — величина обратная периоду протекания болезни

3.1. *В качестве функции, описывающей динамику распространения заболевания, возьмем линейную функцию $f(x, y) = \beta xy$.*

1) *Пусть* $\gamma = 0{,}1$.

Тогда рассмотрим моделирование процесса распространения заболевания, период протекания которого длится 10 дней (к таким заболеваниям относится ангина и ОРВИ).

Зададим начальные параметры $x(0) = 10\,000$, $y(0) = 4500$, $T = 30$, $u_0 = 300$, $\beta = 0{,}01$;

Рекомендованная дата вакцинации для минимизации общей стоимости болезни при вышеперечисленных входных параметрах — 24-й день. Стоимость заболевания составила 149 687.5242 условных единиц.

Графики моделирования процесса представлены на следующих рисунках.

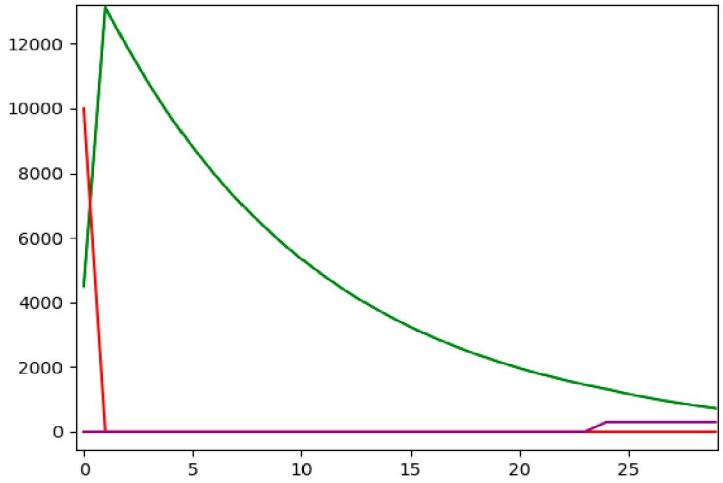


Рис. 1

Красный цвет — динамика изменения числа подверженных заболеванию $x(t)$; зеленый цвет — динамика изменения числа инфицированных $y(t)$; пурпурный цвет — скачковое управление $u(t)$. По оси абсцисс — время t, по оси ординат — количество человек.

Из рисунка 1 видно, что люди без иммунитета заболевают уже на первый день рассматриваемого периода. Резкое возрастание количества больных делает вакцинацию нерентабельной.

Теперь зададим другие начальные параметры $x(0) = 10\,000$, $y(0) = 450$, $T = 30$, $u_0 = 300$, $\beta = 0{,}01$.

Рекомендованная дата вакцинации для минимизации общей стоимости болезни при вышеперечисленных входных параметрах — 12-й день. Стоимость заболевания составила 136 330.39631 условных единиц.

График моделирования процесса показан на рисунке 2.

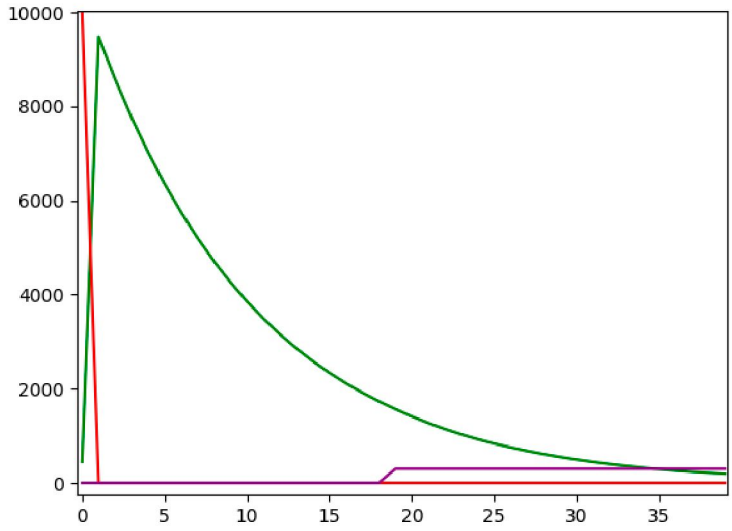


Рис. 2

Красный цвет — динамика изменения числа подверженных заболеванию *x(t);* зеленый цвет — динамика изменения числа инфицированных *y(t);* пурпурный цвет — скачковое управление *u(t).* По оси абсцисс — время *t,* по оси ординат — количество человек.

Из рисунка 2 видно, что люди без иммунитета заболевают уже на первый день рассматриваемого периода, несмотря на уменьшение количества переносчиков инфекции. Резкое возрастание количества больных делает вакцинацию нерентабельной.

Зададим начальные параметры следующим образом: $x(0) = 1000$, $y(0) = 45$, $T = 60$, $u_0 = 30$, $\beta = 0{,}01$.

Рекомендованная дата вакцинации для минимизации общей стоимости лечения при вышеперечисленных входных параметрах — 28-й день. Стоимость лечения заболевания составляет 12 158.426122 условных единиц, что отражено на рисунке 3.

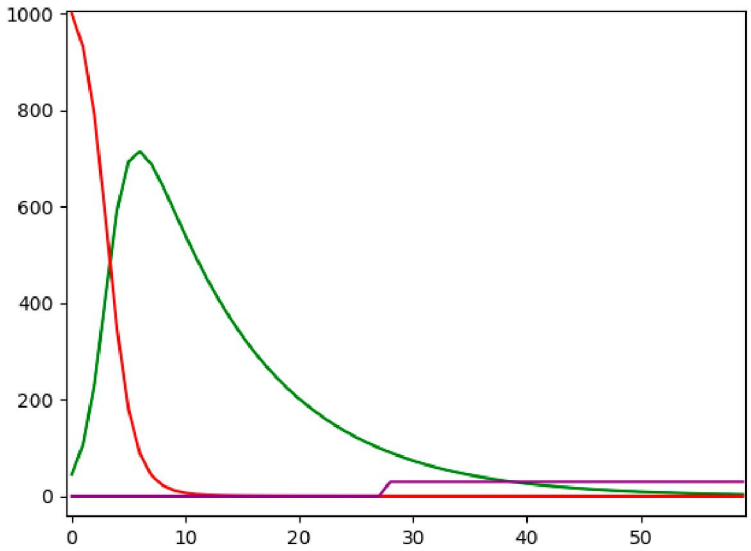


Рис. 3

Красный цвет — динамика изменения числа подверженных заболеванию *x(t);* зеленый цвет — динамика изменения числа инфицированных *y(t);* пурпурный цвет — скачковое управление *u(t).* По оси абсцисс — время *t,* по оси ординат — количество человек.

Как видно на рисунке 3, при таких входных параметрах динамика распространения заболевания заметно изменилась по сравнению с предыдущими результатами. Однако, вводить вакцинацию невыгодно, так как на уход за больными уходит много средств.

Перейдем к рассмотрению заболеваний другого вида.

2) *Пусть* $\gamma = 1/21$.

Рассмотрим моделирование процесса распространения заболевания, период протекания которого длится 21 день (к таким заболеваниям относится холера и малярия).

Зададим начальные параметры $x(0) = 10\,000$, $y(0) = 4500$, $T = 60$, $u_0 = 300$, $\beta = 0{,}01$.

Рекомендованная дата вакцинации для минимизации общей стоимости болезни при вышеперечисленных входных параметрах — 37-й день. Стоимость заболевания составляет 8639.1 условных единиц.

График моделирования процесса показан на рисунке 4.

Красный цвет — динамика изменения числа подверженных заболеванию *x(t);* зеленый цвет — динамика изменения числа инфицированных *y(t);* пурпурный цвет — скачковое управление *u(t).* По оси абсцисс — время *t,* по оси ординат — количество человек.

Из этого рисунка очевидно, что люди без иммунитета заболевают уже на первый день рассматриваемого периода, несмотря на уменьшение количества переносчиков инфекции. Резкое возрастание количества больных делает вакцинацию нерентабельной.

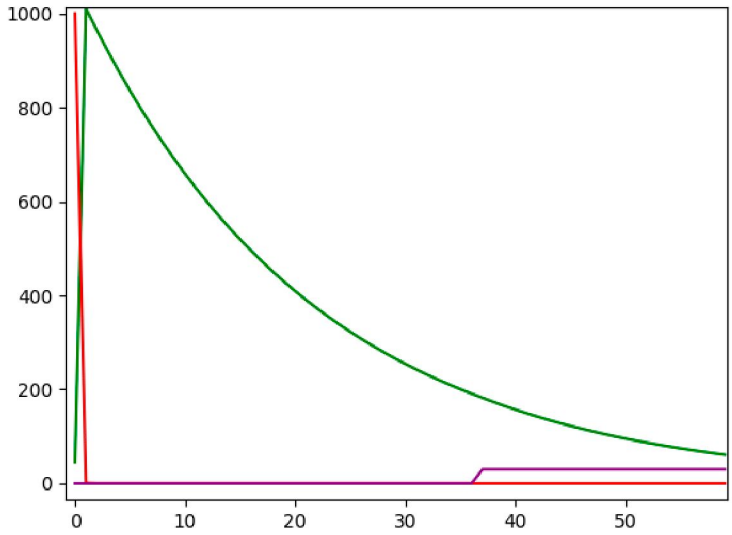


Рис. 4

Зададим другие начальные параметры $x(0) = 10000$, $y(0) = 4500$, $T = 120$, $u_0 = 900$, $\beta = 0{,}001$.

Рекомендованная дата вакцинации для минимизации общей стоимости болезни при вышеперечисленных входных параметрах — 57-й день. Стоимость заболевания составляет 342062.219 условных единиц.

График моделирования процесса показан на рисунке 5.

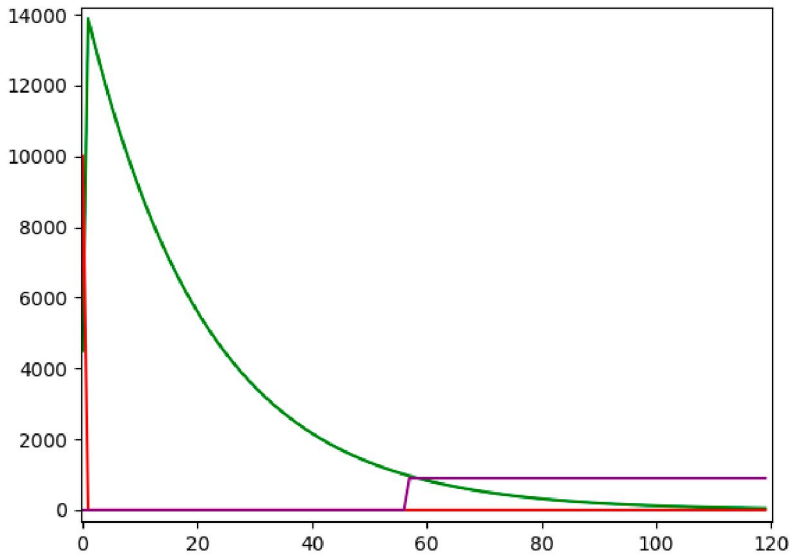


Рис. 5

Красный цвет — динамика изменения числа подверженных заболеванию $x(t)$; зеленый цвет — динамика изменения числа инфицированных $y(t)$; пурпурный цвет — скачковое управление $u(t)$. По оси абсцисс — время t, по оси ординат — количество человек.

Как видно на рисунке 5, при таких входных параметрах динамика распространения заболевания заметно изменилась по сравнению с предыдущими результатами. Однако, вводить вакцинацию невыгодно, так как на уход за больными уходит много средств.

Заключение

Рассматриваемая линейная функция динамики распространения заболеваний $f(x, y) = \beta xy$ не достаточно эффективна для решения поставленной задачи, так как в ней учтено недостаточное количество необходимых для исследования факторов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Андреева Е. А.* Вариационное исчисление и методы оптимизации : учебное пособие для вузов / Е. А. Андреева, В. М. Цирулева. — М. : Высш. шк., 2006. — 348 с..
2. *Андреева Е. А.* Оптимальное управление процессом распространения эпидемии / Е. А. Андреева, В. М. Цирулева // Применение функционального анализа в теории приближений. — Тверь : ТвГУ, 1997. — С. 5—20.
1. *Андреева Е. А.* Оптимизация управляемых систем / Е. А. Андреева, Х. Бенке. — Тверь : ТвГУ, 1995. — 172 с.
2. *Алексеев В. М.* Оптимальное управление / В. М. Алексеев, В. М. Тихомиров, С. В. Фомин. — М. : Наука, 1979. — 432 с.
3. *Понтрягин Л. С.* Математическая теория оптимальных процессов / Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкримедзе, Е. Ф. Мищенко. — М. : Физматгиз, 1961. — С. 13—23.
4. *Еругин Н. П.* Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений / Н. П. Еругин. — М. : Наука, 1979. — С. 117—120.
5. *Лыткина Л. И.* Методы оптимизации с программами в системе MATHCAD : учеб. пособие / Л. И. Лыткина // САА. — Красноярск, 2001. — С. 4—5.
6. Веб-ресурс с подробным описанием функций библиотеки Scipy: https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/tutorial/basic.html.
7. Веб-ресурс с подробным описанием функций библиотеки Matplotlib: https://matplotlib.org/users/beginner.html.
8. Веб-ресурс с подробным описанием функций библиотеки NumPy: https://pythonworld.ru/numpy/1.html.

Воронежский государственный университет

Белоусова Е. П., кандидат физико-математических наук, доцент кафедры системного анализа и управления

E-mail: e.p.belousova@gmail.com

УДК: 656.13.08

В. А. Верзилин,
С. В. Верзилин

О СОСТОЯНИИ ДОРОЖНОЙ АВАРИЙНОСТИ И МЕРАХ ГОСУДАРСТВЕННОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ БЕЗОПАСНОСТИ ДОРОЖНОГО ДВИЖЕНИЯ (НА ПРИМЕРЕ ВОРОНЕЖСКОЙ ОБЛАСТИ)

Аннотация: *проведены анализ и оценка деятельности в сфере обеспечения безопасности дорожного движения. Рассмотрено состояние транспортной и дорожной инфраструктуры области, определены основные виды, причины и условия возникновения ДТП. Проанализирован дорожно-транспортный травматизм различных категорий участников дорожного движения, определены абсолютные и относительные показатели аварийности в Российской Федерации и субъектах Центрально-Черноземного района.*

Предложены дополнительные меры, направленные на снижение количества дорожно-транспортных происшествий и тяжести их последствий.

Ключевые слова: *безопасность дорожного движения, транспортная и дорожная инфраструктура, дорожно-транспортный травматизм, показатели аварийности, государственное регулирование безопасности дорожного движения.*

UDK: 656.13.08

V. A. Versilin,
S. V. Versilin

TRAFFIC ACCIDENT SITUATION AND STATE REGULATION OF ROAD SAFETY (ON THE EXAMPLE OF THE VORONEZH REGION)

Abstract: *the analysis and the evaluation of activities in the field of road safety is performed. The state of the transport and the road infrastructure of the region is considered. The main types, causes and conditions of an accident are identified. The road traffic injuries of various categories*